ملخصي وقواعدي في الرياضيات لمستوى الأولى باك علوم تجريبية

من انجاز : الأستاذ نجيب عثماني أستاذ مادة الرياضيات في الثانوي تأهيلي

ملخص درس المتجهات في الفضاء

I. تساوي متجهتين

1) عناصر متجهة: A و B نقطتان من الفضاء , إذا رمزنا للمتجهة $\overrightarrow{AB}$ بالرمز $\vec{u}$ فان :

- اتجاه $\vec{u}$ هو المستقيم (AB) .
- منحى $\vec{u}$ هو المنحى من A نحو B
- منظم $\vec{u}$ هي المسافة AB و نكتب : $\|\vec{u}\| = AB$

2) ملحوظة: لكل نقطة A من الفضاء , المتجهة $\overrightarrow{AA}$ ليس لها اتجاه و منظمها منعدم ؛ تسمى $\overrightarrow{AA}$ المتجهة المنعدمة , ونكتب $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

لكل متجهة $\vec{u}$ من الفضاء , لكل نقطة A من الفضاء , توجد نقطة وحيدة M من الفضاء بحيث : $\vec{u}=\overrightarrow{AM}$

3) تعريف: نقول إن متجهتين متساويتان , اذا كان لهما نفس الاتجاه ونفس المنحى ونفس المنظم.

4) خاصية: ليكن $ABCD$ رباعيا من الفضاء لدينا :
$ABCD$ متوازي الأضلاع اذا وفقط اذا كان $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

مثال: لتكن A و B و C و D أربع نقط غير مستقيمية
بين أنه اذا كان : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$ لكل M من الفضاء فان : $ABCD$ متوازي الأضلاع.

الجواب :يكفي أن نبين مثلا أن : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ ؟؟؟؟
لدينا : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$ يعني $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CD}$ يعني $\vec{0}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ يعني $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

II. مجموع متجهتين

1) تعريف: لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من الفضاء
مجموع المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هي المتجهة $\vec{w}$ بحيث : اذا وضعنا $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$ فان : $\vec{w}=\overrightarrow{AC}$ و نكتب : $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$

2) علاقة شال: لكل A و B و C نقط من الفضاء
لدينا: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

3) مقابل متجهة: لتكن $\vec{u}$ متجهة من الفضاء ,مقابل المتجهة $\vec{u}$ هي المتجهة التي نرمز لها بالرمز $-\vec{u}$ و التي لها نفس اتجاه $\vec{u}$ ونفس منظم $\vec{u}$ و ولكن منحاها هو عكس منحى $\vec{u}$ ولدينا $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$ لكل A و B من الفضاء .

لتكن A و B و C و D أربع نقط من الفضاء
مثال: نضع : $\vec{u}=3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MC}+4\overrightarrow{MB}-5\overrightarrow{MD}$ لكل M من الفضاء
بين أن : المتجهة $\vec{u}$ غير مرتبطة بالنقطة M

الجواب : $\vec{u}=3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{AC}+4\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{AD}$
ومنه $\vec{u}=-2\overrightarrow{AC}+4\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{AD}$ ومنه المتجهة $\vec{u}$ غير مرتبطة بالنقطة M

III. استقامية متجهتين و التعريف المتجهي لمستقيم ومستوى

تعريف : لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين من الفضاء
نقول ان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان اذا وجد عدد حقيقي k بحيث : $\vec{v}=k\vec{u}$

خاصية :: لتكن A و B و C و D نقط من الفضاء بحيث $A\neq B$ و $C\neq D$
$(AB)\parallel(CD)\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{R};\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$

مثال: ليكن $ABCD$ رباعي الأوجه
نعتبر النقط M و N و P و Q أربع نقط بحيث :
$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{CQ}=3\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{CP}=3\overrightarrow{CD}$

1. أكتب كلا من المتجهتين $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{PQ}$ بدلالة $\overrightarrow{BD}$
2. استنتج أن المتجهتين $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{PQ}$ مستقيميتان .
3. ماذا تستنتج بالنسبة للمستقيمين (MN) و (PQ) ؟

أجوبة : 1) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=-2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{AD}=2\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right)=2\overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CQ}=-\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{CQ}=-3\overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{CB}=-3\left(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}\right)$

$\overrightarrow{PQ}=-3\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\right)=-3\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)=-3\overrightarrow{BD}$

2) وجدنا $\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{BD}$ يعني $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$ ❶

ووجدنا $\overrightarrow{PQ}=-3\overrightarrow{BD}$ يعني $\overrightarrow{BD}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{PQ}$ ❷

من ❶ و ❷ نستنتج أن : $\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{PQ}$ أي $\overrightarrow{MN}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{PQ}$

ومنه المتجهتين $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{PQ}$ مستقيميتان .

3) وجدنا $\overrightarrow{MN}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{PQ}$ اذن المستقيمان (MN) و (PQ) متوازيان

IV. التعريف المتجهي لمستقيم في الفضاء :

لتكن نقطة A من الفضاء و $\vec{u}$ متجهة غير منعدمة
المستقيم (D) الذي يمر من A و $\vec{u}$ متجهة موجهة له نرمز له بالرمز $D(A;\vec{u})$ ولدينا : $M\in D\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{R};\overrightarrow{AM}=k\vec{u}$

$M\in(AB)\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{R};\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$

V. التعريف المتجهي لمستوى في الفضاء :

A و B و C ثلاث نقط من الفضاء غير مستقيمية
$\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متجهتين غير مستقيميتين و A و B و C تكون لنا مستوى ABC نقول $(P)=ABC$ مستوى يمر من النقطة A و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متجهتين موجهتين له ونكتب : $P(A;\vec{u};\vec{v})=ABC$

$M\in P(A;\vec{u};\vec{v})\Leftrightarrow$ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\overrightarrow{AM}$ مستوائية

$M\in P(A;\vec{u};\vec{v})\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{R};\overrightarrow{AM}=k\vec{u}$

$M\in P(A;\vec{u};\vec{v})\Leftrightarrow\exists x\in\mathbb{R};\exists y\in\mathbb{R}\,\overrightarrow{AM}=x\vec{u}+y\vec{v}$

$M\in ABC\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AM}$ مستوائية

مثال: ليكن $ABCD$ رباعي الأوجه و M نقطة من الفضاء بحيث :
$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$

1) أكتب المتجهة $\overrightarrow{AM}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$
2) استنتج أن النقطة M تنتمي إلى المستوى (ABC)
3) استنتج أن المتجهات $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{EC}$ مستوائية .

أجوبة: 1) $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\times\overrightarrow{AB}+1\times\overrightarrow{AC}$

2) وجدنا $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\times\overrightarrow{AB}+1\times\overrightarrow{AC}$ ومنه النقطة M تنتمي إلى المستوى

3) وجدنا $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\times\overrightarrow{AB}+1\times\overrightarrow{AC}$ ومنه المتجهات $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مستوائية