

## I- قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

### أنشطة

#### نشاط 1

ليكن  $n$  عددا صحيحا طبيعيا فرديا  
بين أن 8 يقسم  $n^2 - 1$  لكل عدد صحيح طبيعي فردي  $n$

#### الحل

ليكن  $n$  عدد صحيح طبيعي فردي أي يوجد  $k$  من  $\mathbb{N}$  حيث  $n = 2k + 1$

$$\text{لدينا } n^2 - 1 = (n-1)(n+1) \text{ ومنه } n^2 - 1 = 4k(k+1)$$

وحيث أن  $k(k+1)$  عدد زوجي (لأنه جداء عددين متتاليين)

فانه يوجد  $k'$  من  $\mathbb{N}$  حيث  $k(k+1) = 2k'$  و بالتالي  $n^2 - 1 = 8k'$

إذن 8 يقسم  $n^2 - 1$

#### نشاط 2

بين أن لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  العدد  $n^3 - n$  يقبل القسمة على 3

#### الحل

$$\text{لدينا } n^3 - n = n(n-1)(n+1)$$

ليكن  $n$  من  $\mathbb{N}$  و منه يوجد  $k \in \mathbb{N}$  حيث  $n = 3k$  أو  $n = 3k + 1$  أو  $n = 3k + 2$

و بالتالي  $n^3 - n = 3k(3k-1)(3k+1)$  أو  $n^3 - n = (3k+1)(3k)(3k+2)$

أو  $n^3 - n = (3k+2)(3k+1)(3k+3) = 3(3k+2)(3k+1)(k+1)$

و في جميع هذه الحالات  $n^3 - n = 3k'$  حيث  $k' \in \mathbb{N}$

اذن  $n^3 - n$  يقبل القسمة على 3

#### نشاط 3

أنشر  $(10^6 - 1)^3$  ثم استنتج باقي القسمة للعدد  $999999^3$  على 5

#### نشاط 4

حدد الأرقام  $x$  و  $y$  بحيث العدد الصحيح الطبيعي  $11x1y$  قابل للقسمة على 28

## 1- تعريف

ليكن  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{Z}$   
نقول إن  $b$  يقسم  $a$  و نكتب  $b/a$  إذا وجد  $k$  في  $\mathbb{Z}$  حيث  $a = kb$

$$(a; b) \in \mathbb{Z}^2 \quad b/a \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad a = kb$$

## 2- ملاحظات

\*- إذا كان  $b$  يقسم  $a$  إننا نقول إن  $b$  قاسم لـ  $a$  أو  $a$  مضاعف لـ  $b$

\*- ليكن  $b \in \mathbb{Z}$  مجموعة مضاعفات العدد  $b$  هي المجموعة  $b \cdot \mathbb{Z} = \{k \cdot b / k \in \mathbb{Z}\}$

\*- ليكن  $a \in \mathbb{Z}^*$   $b \in \mathbb{Z}$  :  $b/a \Rightarrow |b| \leq |a|$

## 3- خاصيات العلاقة " $b/a$ "

\*-  $a/a$   $\forall a \in \mathbb{Z}$  نقول إن العلاقة "  $b/a$  " انعكاسية

\*-  $b/a \Rightarrow b/c$   $\forall (a; b; c) \in \mathbb{Z}^3$  نقول إن العلاقة "  $b/a$  " متعدية

\*-  $|a| = |b|$   $\forall (a; b; c) \in \mathbb{Z}^3$   $\begin{cases} b/a \\ a/b \end{cases} \Rightarrow$

## ملاحظة

$$\forall (a; b; c) \in \mathbb{N}^3 \quad \begin{cases} b/a \\ a/b \end{cases} \Rightarrow a = b$$

نقول إن العلاقة "  $b/a$  " تخالفية في  $\mathbb{N}$

## تمرين

$$-1 \text{ بين أن } \forall (a; b) \in \mathbb{Z}^2 \quad b/a \Leftrightarrow a \cdot \mathbb{Z} \subset b \cdot \mathbb{Z}$$

$$-2 \text{ بين أن } \forall (a; x_1; x_2; y_1; y_2) \in \mathbb{Z}^5 \quad a/(x_1 - y_1) \wedge a/(x_2 - y_2) \Leftrightarrow a/(x_1 x_2 - y_1 y_2)$$

## -II- القسمة الاقليدية في $\mathbb{Z}$

### 1- القسمة الاقليدية في $\mathbb{N}$

#### مبرهنة

ليكن  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{N}$  حيث  $a \neq b$   
يوجد زوج وحيد  $(q; r)$  من  $\mathbb{N}^2$  حيث  $a = bq + r$  حيث  $0 \leq r < b$

## اصطلاحات

العملية التي تمكننا من تحديد  $(q; r)$  بحيث  $a = bq + r$  حيث  $0 \leq r < b$  تسمى القسمة الاقليدية لـ  $a$  على  $b$  في  $\mathbb{N}$

العدد  $a$  يسمى المقسوم و العدد  $b$  يسمى المقسوم عليه و العدد  $q$  الخارج و  $r$  الباقي.

### 2- القسمة الاقليدية في $\mathbb{Z}$

#### مبرهنة

ليكن  $a$  من  $\mathbb{Z}$  و  $b$  في  $\mathbb{N}^*$  حيث  $a \neq b$   
يوجد زوج وحيد  $(q; r)$  من  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  حيث  $a = bq + r$  حيث  $0 \leq r < b$

## اصطلاحات

العملية التي تمكننا من تحديد  $(q; r)$  من  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  بحيث  $a = bq + r$  حيث  $0 \leq r < b$  تسمى القسمة الاقليدية لـ  $a$  على  $b$  في  $\mathbb{Z}$

العدد  $a$  يسمى المقسوم و العدد  $b$  يسمى المقسوم عليه و العدد  $q$  الخارج و  $r$  الباقي

## تمرين

حدد الأعداد الصحيحة النسبية  $x$  بحيث يكون للقسمة الاقليدية لـ  $x$  على  $7$  خارج  $q$  و باقي  $q^2$

## تمرين

بين إذا كان للقسمة الاقليدية لـ  $a$  على  $b$  و القسمة الاقليدية لـ  $a'$  على  $b$  نفس الخارج  $q$  و كان  $a < x < a'$  فان خارج القسمة الاقليدية لـ  $x$  على  $b$

## - الأعداد الأولية

### 1- تعاريف

أ- القواسم الفعلية لعدد صحيح نسبي

#### تعريف

ليكن  $a \in \mathbb{Z}$   
نقول إن العدد  $d$  قاسم فعلي للعدد  $a$  إذا و فقط إذا كان  $d$  يقسم  $a$  و  $d \notin \{-1; 1; -a; a\}$

#### أمثلة

\*- القواسم الفعلية للعدد 6 هي 2 و -2 و 3 و -3  
\*- لدينا  $D_7 = \{1; -1; 7; -7\}$  العدد 7 لا يقبل قواسم فعلية

### ب- الأعداد الأولية

#### تعريف

ليكن  $a \in \mathbb{Z}$   
نقول إن العدد  $a$  أولي إذا و فقط إذا كان  $a$  يخالف 1 و -1 و ليس له قواسم فعلية  
 $a$  أولي  $\Leftrightarrow D_a = \{1; -1; a; -a\}$  و  $|a| \neq 1$

نرمز لمجموعة الأعداد الأولية بـ  $P$

### 2- خاصيات

أ- إذا كان  $p$  و  $q$  عددين أوليين و  $|q| \neq |p|$  فان قاسمهما المشترك الأكبر هو 1 ( العكس غير صحيح )  
 ب- ليكن  $a$  عددا غير أولي في  $\mathbb{Z}^*$  و يخالف 1 و -1 .  
 أصغر قاسم فعلي موجب للعدد  $a$  هو عدد أولي  
 د- مجموعة الأعداد الأولية غير المنتهية

البرهان

نبرهن أن مجموعة الأعداد الأولية غير المنتهية

لتكن  $P^+$  مجموعة الأعداد الأولية الموجبة

$$2 \in P^+ \text{ لأن } P^+ \neq \emptyset$$

لنفترض أن  $P^+$  منتهية و ليكن  $p$  أكبر عنصر من  $P^+$  . لنعتبر  $m = p! + 1$  لدينا  $m > p$

ومنه  $m \notin P^+$  أي  $m$  ليس أوليا و بالتالي للعدد  $m$  قاسم أولي  $q$  ومنه  $q \in P^+$  و  $q \leq p$

$q \leq p$  يستلزم  $q$  يقسم  $p!$  لأن  $(q$  أحد عوامل  $p!)$

لدينا  $q/m$  و  $q/p!$  ومن  $q/(m-p!)$  أي  $q/1$  وهذا يتناقض مع كون  $q$  أولي

ومنه  $P^+$  غير منتهية إذن  $P$  غير منتهية

3- طريقة عملية لتحديد الأعداد الأولية

مبرهنة

ليكن  $n \in \mathbb{N}$  و  $n \geq 2$

إذا كان  $n$  غير أولي فانه يوجد عدد أولي موجب  $p$  يقسم  $n$  و  $p^2 \leq n$

البرهان

ليكن  $n \in \mathbb{N}$  و  $n \geq 2$  و  $n$  غير أولي و ليكن  $p$  أصغر قاسم فعلي موجب لـ  $n$  إذن  $p$  أولي ومنه يوجد

$k$  من  $\mathbb{N}^*$  حيث  $n = pk$

بما أن  $1 < p < n$  فان  $1 < k < kp = n$  إذن  $k$  قاسم فعلي موجب للعدد  $n$  و بالتالي  $p \leq k$

$$\text{إذن } p^2 \leq pk = n$$

ملاحظة

ليكن  $n \in \mathbb{N}$  و  $n \geq 2$

لتأكد من أن  $n$  هل أولي أم لا. نرى هل يقبل القسمة على أحد الأعداد الأولية  $p$  حيث  $p^2 \leq n$

❖ فإذا كان يقبل القسمة على أحدهم فان  $n$  غير أولي

❖ وإذا كان لا يقبل القسمة على أي واحد مهن فان  $n$  عدد أولي

( عمليا نتوقف عندما تكون  $n > p^2$  )

مثال العدد 179 لا يقبل القسمة على أي عدد من الأعداد الأولية التالية 2 و 3 و 5 و 7 و 11 و 13

$$17^2 = 289 ; 13^2 = 169$$

4- خاصيات

خاصية

\*- إذا كان عدد أولي يقسم جداء أعداد صحيحة نسبية فانه يقسم أحد عوامل هذا الجداء

نتيجة

لتكن  $p_1$  و  $p_2$  و ..... و  $p_n$  أعداد أولية موجبة و  $p$  عددا أوليا

$$p / p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n \Rightarrow \exists i \in \{1; 2; \dots; n\} \quad p = p_i$$

5- التفكيك الى جداء من عوامل أولية

1- مبرهنة

كل عدد صحيح نسبي  $n$  غير منعدم ومخالف لـ 1 و -1 يمكن كتابته بكيفية وحيدة على شكل

$$n = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k} \text{ حيث } p_1 \text{ و } p_2 \text{ و } \dots \text{ و } p_n \text{ أعداد أولية مختلفة مثنى مثنى و } \alpha_1$$

و  $\alpha_2$  و ..... و  $\alpha_n$  أعداد صحيحة طبيعية غير منعدمة و  $\varepsilon = \pm 1$

ملاحظة عندما نكتب  $n$  على شكل  $n = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$  فاننا نقول اننا فككنا  $n$  الى جداء

عوامل أولية

مثال فكك العدد 1752- إلى جداء عوامل أولية

ليكن  $n = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$  حيث  $p_1$  و  $p_2$  و ..... و  $p_n$  أعداد أولية يكون عدد  $d$  قاسما للعدد  $n$  إذا وفقط إذا كان تفكيك  $d$  إلى عوامل جداء أولية على شكل

$$d = \varepsilon p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \dots \times p_k^{\beta_k}$$

حيث  $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$  لكل  $i$  من  $\{1; 2; \dots; k\}$

## نتيجة 2

ليكن  $n = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$  حيث  $p_1$  و  $p_2$  و ..... و  $p_n$  أعداد أولية يكون عدد  $m$  مضاعفا للعدد  $n$  إذا وفقط إذا كان تفكيك  $m$  إلى عوامل جداء أولية على شكل

$$d = \varepsilon p_1^{\lambda_1} \times p_2^{\lambda_2} \times \dots \times p_k^{\lambda_k}$$

حيث  $0 \leq \alpha_i \leq \lambda_i$  لكل  $i$  من  $\{1; 2; \dots; k\}$

## IV- القاسم المشترك الأكبر

نرمز لمجموعة قواسم العدد الصحيح النسبي  $a$  بالرمز  $D_a$

## 1- تعريف

ليكن  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{Z}^*$  القاسم المشترك الأكبر للعددين  $a$  و  $b$  هو أكبر قاسم مشترك موجب قطعاً لـ  $a$  و  $b$  يرمز له  $a \wedge b$

$$\delta = a \wedge b \Leftrightarrow \begin{cases} \delta \in D_a \cap D_b \\ \forall x \in D_a \cap D_b \quad x \leq \delta \end{cases}$$

## 2- خاصيات

ليكن  $a$  و  $b$  و  $c$  من  $\mathbb{Z}^*$

$$a \wedge b = b \wedge a$$

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$$

$$a \wedge a = |a|$$

مثال  $48 \wedge 60 = 12$

3- خوارزمية اقليدس أو طريقة " القسمة المتتالية " لتحديد القاسم المشترك  
أ- ملاحظة

$$\forall a \in \mathbb{Z}^* \quad D_a = D_{-a} \quad *$$

$$\forall (a; b) \in \mathbb{Z}^{*2} \quad a \wedge b = |a| \wedge |b| \quad *$$

يرجع إلى تحديد القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين طبيعيين.

ب- ليكن  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{N}^*$

$$a \wedge b = b \text{ فإن } b/a$$

- إذا كان  $b$  لا يقسم  $a$  فانه يوجد زوج وحيد  $(q; r)$  من  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$  حيث  $0 < r < b$  و  $a = bq + r$

بما أن  $r = a - bq$  فان كل قاسم مشترك لـ  $a$  و  $b$  يقسم  $r$

و بالتالي قاسم قاسم مشترك لـ  $a$  و  $b$  هو قاسم مشترك لـ  $r$  أي  $D_a \cap D_b \subset D_r \cap D_b$

عكسياً كل قاسم مشترك لـ  $b$  و  $r$  يقسم  $a$  ( لأن  $a = bq + r$  )

ومنه كل قاسم مشترك لـ  $b$  و  $r$  هو قاسم مشترك لـ  $a$  و  $b$  أي  $D_r \cap D_b \subset D_a \cap D_b$

$$a \wedge b = r \wedge b \text{ وبالتالي } D_a \cap D_b = D_r \cap D_b$$

## تمهيدة

ليكن  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{N}^*$  بحيث  $b$  لا يقسم  $a$  و  $r$  باقي القسمة الاقليدية لـ  $a$  على  $b$

$$a \wedge b = r \wedge b$$

ج- ليكن  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{N}^*$  نفترض أن  $b < a$

بإجراء القسمة الاقليدية لـ  $a$  على  $b$  نحصل على  $a = bq_1 + r_1$  حيث  $0 \leq r_1 < b$

❖ إذا كان  $r_1 = 0$  فإن  $b/a$  ومنه  $a \wedge b = b$

❖ إذا كان  $r_1 > 0$  نجري القسمة الاقليدية لـ  $b$  على  $r_1$  ونحصل على  $b = r_1q_2 + r_2$  و  $0 \leq r_2 < r_1$

إذا كان  $r_2 = 0$  فإن  $b \wedge r_1 = r_1$  ومنه  $a \wedge b = b \wedge r_1 = r_1$

إذا كان  $r_2 > 0$  نجري القسمة الاقليدية لـ  $r_1$  على  $r_2$  ونحصل على  $r_1 = r_2q_3 + r_3$  و  $0 \leq r_3 < r_2$

بإجراء العملية  $n$  مرة نحصل على

$$a \wedge b = b \wedge r_1, \quad 0 < r_1 < b, \quad a = bq_1 + r_1$$

$$b \wedge r_1 = r_1 \wedge r_2, \quad 0 < r_2 < r_1, \quad b = r_1q_2 + r_2$$

$$r_1 \wedge r_2 = r_2 \wedge r_3, \quad 0 < r_3 < r_2, \quad r_1 = r_2q_3 + r_3$$

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$r_{n-2} \wedge r_{n-1} = r_{n-1} \wedge r_n, \quad 0 < r_n < r_{n-1}, \quad r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n$$

ومن هنا نستنتج  $a \wedge b = b \wedge r_1 = r_1 \wedge r_2 = r_2 \wedge r_3 = \dots = r_{n-2} \wedge r_{n-1} = r_{n-1} \wedge r_n$

$$0 < r_n < r_{n-1} < \dots < r_3 < r_2 < r_1 < b$$

نضع  $A = \{r_1; r_2; r_3; \dots; r_n; \dots\}$

$A$  جزء من  $\mathbb{N}$  مكبور بالعدد  $b$  ومنه  $A$  مجموعة منتهية

إذن  $\exists p \in \mathbb{N} / r_{p+1} = 0 ; r_p \neq 0$

بما أن  $r_{p+1} = 0$  فإن  $r_{p-1} = r_pq_{p+1}$  ومنه  $r_{p-1} \wedge r_p = r_b$

إذن  $a \wedge b = r_p$

نتيجة

ليكن  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{N}^*$

القاسم المشترك الأكبر للعددين  $a$  و  $b$  هو آخر باقي غير منعدم في طريقة القسمة المتتالية لـ  $a$  على  $b$

**مثال** باستعمال طريقة القسمة المتتالية، نحدد القاسم المشترك الأكبر للعددين 1640 و 156

$$1640 = 156 \times 10 + 80$$

$$156 = 80 \times 1 + 76$$

$$80 = 76 \times 1 + 4$$

$$76 = 4 \times 19 + 0$$

$$1640 \wedge 156 = 4 \quad \text{إذن}$$

1- خاصيات

أ- مبرهنة

ليكن  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{Z}^*$  و  $\delta = a \wedge b$

يوجد عدنان  $u$  و  $v$  من  $\mathbb{Z}$  حيث  $\delta = au + bv$

البرهان

ليكن  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{Z}^*$  و  $\delta = a \wedge b$

نعتبر  $A = \{n \in \mathbb{N}^* / n = au + bv ; (u; v) \in \mathbb{Z}^2\}$

لدينا  $A \neq \emptyset$  لأن  $a^2 + b^2 \in A$

$A \subset \mathbb{N}$  و بالتالي  $\forall x \in A \quad x \geq p$

ليكن  $p = au_0 + bv_0$  نبرهن أن  $\delta = p$

- ❖ بما أن  $\delta/a$  و  $\delta/b$  فان  $\delta/p$  و منه  $\delta \leq p$
- ❖ بإنجاز القسمة لـ  $a$  على  $p$  نحصل على  $a = pq + r$  ;  $0 \leq r < p$   $\exists (q; r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$
- ❖ ومنه  $r = a - q(au_0 + bv_0) = a(1 - qu_0) + b(-qv_0)$
- إذا كان  $r > 0$  فان  $r \in A$  و منه  $r \geq p$  وهذا يتناقض مع كون  $r < p$
- و بالتالي  $r = 0$  أي  $p/a$  و بنفس الطريقة نبرهن أن  $p/b$
- ومنه  $p$  قاسم مشترك لـ  $a$  و  $b$  و بالتالي  $\delta \geq p$
- لدينا  $\delta \leq p$  و  $\delta \geq p$  إذن  $\delta = p$

### ب- استنتاجات

- \* من البرهان السابق نستنتج  $\delta = a \wedge b$  هو أصغر عدد موجب قطعاً من المجموعة  $B = \{n \in \mathbb{Z}^* / n = au + bv ; (u; v) \in \mathbb{Z}^2\}$
- \* بما أن  $\delta$  قاسم مشترك لـ  $a$  و  $b$  فان أي قاسم لـ  $\delta$  يقسم  $a$  و  $b$
- عكسيا إذا كان  $c$  قاسم مشترك لـ  $a$  و  $b$  فان  $a = k_1c$  ;  $b = k_2c$   $\exists (k_1; k_2) \in \mathbb{Z}^2$
- بما أن  $\delta = a \wedge b$  فانه  $\delta = au + bv$   $\exists (u; v) \in \mathbb{Z}^2 /$
- ومنه  $\delta = (k_1u + k_2v)c$  أي  $c$  يقسم  $\delta$

### مبرهنة

ليكن  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{Z}^*$  و  $\delta = a \wedge b$   
مجموعة قواسم  $\delta$  هي مجموعة القواسم المشتركة لـ  $a$  و  $b$  ( $D_a \cap D_b = D_\delta$ )

### نتيجة

إذا كان  $a$  و  $b$  و  $c$  أعداد من  $\mathbb{Z}$  فان  
 $a \wedge b = \delta \Rightarrow ca \wedge cb = |c|\delta$

### خاصية

ليكن  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{Z}^*$  حيث  $a = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$  و  $b = \varepsilon p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \dots \times p_k^{\beta_k}$  و  
وحيث  $p_1$  و  $p_2$  و  $p_3$  و  $p_4$  و  $p_5$  و  $p_6$  و  $p_7$  و  $p_8$  و  $p_9$  و  $p_{10}$  و  $p_{11}$  و  $p_{12}$  و  $p_{13}$  و  $p_{14}$  و  $p_{15}$  و  $p_{16}$  و  $p_{17}$  و  $p_{18}$  و  $p_{19}$  و  $p_{20}$  و  $p_{21}$  و  $p_{22}$  و  $p_{23}$  و  $p_{24}$  و  $p_{25}$  و  $p_{26}$  و  $p_{27}$  و  $p_{28}$  و  $p_{29}$  و  $p_{30}$  و  $p_{31}$  و  $p_{32}$  و  $p_{33}$  و  $p_{34}$  و  $p_{35}$  و  $p_{36}$  و  $p_{37}$  و  $p_{38}$  و  $p_{39}$  و  $p_{40}$  و  $p_{41}$  و  $p_{42}$  و  $p_{43}$  و  $p_{44}$  و  $p_{45}$  و  $p_{46}$  و  $p_{47}$  و  $p_{48}$  و  $p_{49}$  و  $p_{50}$  و  $p_{51}$  و  $p_{52}$  و  $p_{53}$  و  $p_{54}$  و  $p_{55}$  و  $p_{56}$  و  $p_{57}$  و  $p_{58}$  و  $p_{59}$  و  $p_{60}$  و  $p_{61}$  و  $p_{62}$  و  $p_{63}$  و  $p_{64}$  و  $p_{65}$  و  $p_{66}$  و  $p_{67}$  و  $p_{68}$  و  $p_{69}$  و  $p_{70}$  و  $p_{71}$  و  $p_{72}$  و  $p_{73}$  و  $p_{74}$  و  $p_{75}$  و  $p_{76}$  و  $p_{77}$  و  $p_{78}$  و  $p_{79}$  و  $p_{80}$  و  $p_{81}$  و  $p_{82}$  و  $p_{83}$  و  $p_{84}$  و  $p_{85}$  و  $p_{86}$  و  $p_{87}$  و  $p_{88}$  و  $p_{89}$  و  $p_{90}$  و  $p_{91}$  و  $p_{92}$  و  $p_{93}$  و  $p_{94}$  و  $p_{95}$  و  $p_{96}$  و  $p_{97}$  و  $p_{98}$  و  $p_{99}$  و  $p_{100}$  و  $p_{101}$  و  $p_{102}$  و  $p_{103}$  و  $p_{104}$  و  $p_{105}$  و  $p_{106}$  و  $p_{107}$  و  $p_{108}$  و  $p_{109}$  و  $p_{110}$  و  $p_{111}$  و  $p_{112}$  و  $p_{113}$  و  $p_{114}$  و  $p_{115}$  و  $p_{116}$  و  $p_{117}$  و  $p_{118}$  و  $p_{119}$  و  $p_{120}$  و  $p_{121}$  و  $p_{122}$  و  $p_{123}$  و  $p_{124}$  و  $p_{125}$  و  $p_{126}$  و  $p_{127}$  و  $p_{128}$  و  $p_{129}$  و  $p_{130}$  و  $p_{131}$  و  $p_{132}$  و  $p_{133}$  و  $p_{134}$  و  $p_{135}$  و  $p_{136}$  و  $p_{137}$  و  $p_{138}$  و  $p_{139}$  و  $p_{140}$  و  $p_{141}$  و  $p_{142}$  و  $p_{143}$  و  $p_{144}$  و  $p_{145}$  و  $p_{146}$  و  $p_{147}$  و  $p_{148}$  و  $p_{149}$  و  $p_{150}$  و  $p_{151}$  و  $p_{152}$  و  $p_{153}$  و  $p_{154}$  و  $p_{155}$  و  $p_{156}$  و  $p_{157}$  و  $p_{158}$  و  $p_{159}$  و  $p_{160}$  و  $p_{161}$  و  $p_{162}$  و  $p_{163}$  و  $p_{164}$  و  $p_{165}$  و  $p_{166}$  و  $p_{167}$  و  $p_{168}$  و  $p_{169}$  و  $p_{170}$  و  $p_{171}$  و  $p_{172}$  و  $p_{173}$  و  $p_{174}$  و  $p_{175}$  و  $p_{176}$  و  $p_{177}$  و  $p_{178}$  و  $p_{179}$  و  $p_{180}$  و  $p_{181}$  و  $p_{182}$  و  $p_{183}$  و  $p_{184}$  و  $p_{185}$  و  $p_{186}$  و  $p_{187}$  و  $p_{188}$  و  $p_{189}$  و  $p_{190}$  و  $p_{191}$  و  $p_{192}$  و  $p_{193}$  و  $p_{194}$  و  $p_{195}$  و  $p_{196}$  و  $p_{197}$  و  $p_{198}$  و  $p_{199}$  و  $p_{200}$  و  $p_{201}$  و  $p_{202}$  و  $p_{203}$  و  $p_{204}$  و  $p_{205}$  و  $p_{206}$  و  $p_{207}$  و  $p_{208}$  و  $p_{209}$  و  $p_{210}$  و  $p_{211}$  و  $p_{212}$  و  $p_{213}$  و  $p_{214}$  و  $p_{215}$  و  $p_{216}$  و  $p_{217}$  و  $p_{218}$  و  $p_{219}$  و  $p_{220}$  و  $p_{221}$  و  $p_{222}$  و  $p_{223}$  و  $p_{224}$  و  $p_{225}$  و  $p_{226}$  و  $p_{227}$  و  $p_{228}$  و  $p_{229}$  و  $p_{230}$  و  $p_{231}$  و  $p_{232}$  و  $p_{233}$  و  $p_{234}$  و  $p_{235}$  و  $p_{236}$  و  $p_{237}$  و  $p_{238}$  و  $p_{239}$  و  $p_{240}$  و  $p_{241}$  و  $p_{242}$  و  $p_{243}$  و  $p_{244}$  و  $p_{245}$  و  $p_{246}$  و  $p_{247}$  و  $p_{248}$  و  $p_{249}$  و  $p_{250}$  و  $p_{251}$  و  $p_{252}$  و  $p_{253}$  و  $p_{254}$  و  $p_{255}$  و  $p_{256}$  و  $p_{257}$  و  $p_{258}$  و  $p_{259}$  و  $p_{260}$  و  $p_{261}$  و  $p_{262}$  و  $p_{263}$  و  $p_{264}$  و  $p_{265}$  و  $p_{266}$  و  $p_{267}$  و  $p_{268}$  و  $p_{269}$  و  $p_{270}$  و  $p_{271}$  و  $p_{272}$  و  $p_{273}$  و  $p_{274}$  و  $p_{275}$  و  $p_{276}$  و  $p_{277}$  و  $p_{278}$  و  $p_{279}$  و  $p_{280}$  و  $p_{281}$  و  $p_{282}$  و  $p_{283}$  و  $p_{284}$  و  $p_{285}$  و  $p_{286}$  و  $p_{287}$  و  $p_{288}$  و  $p_{289}$  و  $p_{290}$  و  $p_{291}$  و  $p_{292}$  و  $p_{293}$  و  $p_{294}$  و  $p_{295}$  و  $p_{296}$  و  $p_{297}$  و  $p_{298}$  و  $p_{299}$  و  $p_{300}$  و  $p_{301}$  و  $p_{302}$  و  $p_{303}$  و  $p_{304}$  و  $p_{305}$  و  $p_{306}$  و  $p_{307}$  و  $p_{308}$  و  $p_{309}$  و  $p_{310}$  و  $p_{311}$  و  $p_{312}$  و  $p_{313}$  و  $p_{314}$  و  $p_{315}$  و  $p_{316}$  و  $p_{317}$  و  $p_{318}$  و  $p_{319}$  و  $p_{320}$  و  $p_{321}$  و  $p_{322}$  و  $p_{323}$  و  $p_{324}$  و  $p_{325}$  و  $p_{326}$  و  $p_{327}$  و  $p_{328}$  و  $p_{329}$  و  $p_{330}$  و  $p_{331}$  و  $p_{332}$  و  $p_{333}$  و  $p_{334}$  و  $p_{335}$  و  $p_{336}$  و  $p_{337}$  و  $p_{338}$  و  $p_{339}$  و  $p_{340}$  و  $p_{341}$  و  $p_{342}$  و  $p_{343}$  و  $p_{344}$  و  $p_{345}$  و  $p_{346}$  و  $p_{347}$  و  $p_{348}$  و  $p_{349}$  و  $p_{350}$  و  $p_{351}$  و  $p_{352}$  و  $p_{353}$  و  $p_{354}$  و  $p_{355}$  و  $p_{356}$  و  $p_{357}$  و  $p_{358}$  و  $p_{359}$  و  $p_{360}$  و  $p_{361}$  و  $p_{362}$  و  $p_{363}$  و  $p_{364}$  و  $p_{365}$  و  $p_{366}$  و  $p_{367}$  و  $p_{368}$  و  $p_{369}$  و  $p_{370}$  و  $p_{371}$  و  $p_{372}$  و  $p_{373}$  و  $p_{374}$  و  $p_{375}$  و  $p_{376}$  و  $p_{377}$  و  $p_{378}$  و  $p_{379}$  و  $p_{380}$  و  $p_{381}$  و  $p_{382}$  و  $p_{383}$  و  $p_{384}$  و  $p_{385}$  و  $p_{386}$  و  $p_{387}$  و  $p_{388}$  و  $p_{389}$  و  $p_{390}$  و  $p_{391}$  و  $p_{392}$  و  $p_{393}$  و  $p_{394}$  و  $p_{395}$  و  $p_{396}$  و  $p_{397}$  و  $p_{398}$  و  $p_{399}$  و  $p_{400}$  و  $p_{401}$  و  $p_{402}$  و  $p_{403}$  و  $p_{404}$  و  $p_{405}$  و  $p_{406}$  و  $p_{407}$  و  $p_{408}$  و  $p_{409}$  و  $p_{410}$  و  $p_{411}$  و  $p_{412}$  و  $p_{413}$  و  $p_{414}$  و  $p_{415}$  و  $p_{416}$  و  $p_{417}$  و  $p_{418}$  و  $p_{419}$  و  $p_{420}$  و  $p_{421}$  و  $p_{422}$  و  $p_{423}$  و  $p_{424}$  و  $p_{425}$  و  $p_{426}$  و  $p_{427}$  و  $p_{428}$  و  $p_{429}$  و  $p_{430}$  و  $p_{431}$  و  $p_{432}$  و  $p_{433}$  و  $p_{434}$  و  $p_{435}$  و  $p_{436}$  و  $p_{437}$  و  $p_{438}$  و  $p_{439}$  و  $p_{440}$  و  $p_{441}$  و  $p_{442}$  و  $p_{443}$  و  $p_{444}$  و  $p_{445}$  و  $p_{446}$  و  $p_{447}$  و  $p_{448}$  و  $p_{449}$  و  $p_{450}$  و  $p_{451}$  و  $p_{452}$  و  $p_{453}$  و  $p_{454}$  و  $p_{455}$  و  $p_{456}$  و  $p_{457}$  و  $p_{458}$  و  $p_{459}$  و  $p_{460}$  و  $p_{461}$  و  $p_{462}$  و  $p_{463}$  و  $p_{464}$  و  $p_{465}$  و  $p_{466}$  و  $p_{467}$  و  $p_{468}$  و  $p_{469}$  و  $p_{470}$  و  $p_{471}$  و  $p_{472}$  و  $p_{473}$  و  $p_{474}$  و  $p_{475}$  و  $p_{476}$  و  $p_{477}$  و  $p_{478}$  و  $p_{479}$  و  $p_{480}$  و  $p_{481}$  و  $p_{482}$  و  $p_{483}$  و  $p_{484}$  و  $p_{485}$  و  $p_{486}$  و  $p_{487}$  و  $p_{488}$  و  $p_{489}$  و  $p_{490}$  و  $p_{491}$  و  $p_{492}$  و  $p_{493}$  و  $p_{494}$  و  $p_{495}$  و  $p_{496}$  و  $p_{497}$  و  $p_{498}$  و  $p_{499}$  و  $p_{500}$  و  $p_{501}$  و  $p_{502}$  و  $p_{503}$  و  $p_{504}$  و  $p_{505}$  و  $p_{506}$  و  $p_{507}$  و  $p_{508}$  و  $p_{509}$  و  $p_{510}$  و  $p_{511}$  و  $p_{512}$  و  $p_{513}$  و  $p_{514}$  و  $p_{515}$  و  $p_{516}$  و  $p_{517}$  و  $p_{518}$  و  $p_{519}$  و  $p_{520}$  و  $p_{521}$  و  $p_{522}$  و  $p_{523}$  و  $p_{524}$  و  $p_{525}$  و  $p_{526}$  و  $p_{527}$  و  $p_{528}$  و  $p_{529}$  و  $p_{530}$  و  $p_{531}$  و  $p_{532}$  و  $p_{533}$  و  $p_{534}$  و  $p_{535}$  و  $p_{536}$  و  $p_{537}$  و  $p_{538}$  و  $p_{539}$  و  $p_{540}$  و  $p_{541}$  و  $p_{542}$  و  $p_{543}$  و  $p_{544}$  و  $p_{545}$  و  $p_{546}$  و  $p_{547}$  و  $p_{548}$  و  $p_{549}$  و  $p_{550}$  و  $p_{551}$  و  $p_{552}$  و  $p_{553}$  و  $p_{554}$  و  $p_{555}$  و  $p_{556}$  و  $p_{557}$  و  $p_{558}$  و  $p_{559}$  و  $p_{560}$  و  $p_{561}$  و  $p_{562}$  و  $p_{563}$  و  $p_{564}$  و  $p_{565}$  و  $p_{566}$  و  $p_{567}$  و  $p_{568}$  و  $p_{569}$  و  $p_{570}$  و  $p_{571}$  و  $p_{572}$  و  $p_{573}$  و  $p_{574}$  و  $p_{575}$  و  $p_{576}$  و  $p_{577}$  و  $p_{578}$  و  $p_{579}$  و  $p_{580}$  و  $p_{581}$  و  $p_{582}$  و  $p_{583}$  و  $p_{584}$  و  $p_{585}$  و  $p_{586}$  و  $p_{587}$  و  $p_{588}$  و  $p_{589}$  و  $p_{590}$  و  $p_{591}$  و  $p_{592}$  و  $p_{593}$  و  $p_{594}$  و  $p_{595}$  و  $p_{596}$  و  $p_{597}$  و  $p_{598}$  و  $p_{599}$  و  $p_{600}$  و  $p_{601}$  و  $p_{602}$  و  $p_{603}$  و  $p_{604}$  و  $p_{605}$  و  $p_{606}$  و  $p_{607}$  و  $p_{608}$  و  $p_{609}$  و  $p_{610}$  و  $p_{611}$  و  $p_{612}$  و  $p_{613}$  و  $p_{614}$  و  $p_{615}$  و  $p_{616}$  و  $p_{617}$  و  $p_{618}$  و  $p_{619}$  و  $p_{620}$  و  $p_{621}$  و  $p_{622}$  و  $p_{623}$  و  $p_{624}$  و  $p_{625}$  و  $p_{626}$  و  $p_{627}$  و  $p_{628}$  و  $p_{629}$  و  $p_{630}$  و  $p_{631}$  و  $p_{632}$  و  $p_{633}$  و  $p_{634}$  و  $p_{635}$  و  $p_{636}$  و  $p_{637}$  و  $p_{638}$  و  $p_{639}$  و  $p_{640}$  و  $p_{641}$  و  $p_{642}$  و  $p_{643}$  و  $p_{644}$  و  $p_{645}$  و  $p_{646}$  و  $p_{647}$  و  $p_{648}$  و  $p_{649}$  و  $p_{650}$  و  $p_{651}$  و  $p_{652}$  و  $p_{653}$  و  $p_{654}$  و  $p_{655}$  و  $p_{656}$  و  $p_{657}$  و  $p_{658}$  و  $p_{659}$  و  $p_{660}$  و  $p_{661}$  و  $p_{662}$  و  $p_{663}$  و  $p_{664}$  و  $p_{665}$  و  $p_{666}$  و  $p_{667}$  و  $p_{668}$  و  $p_{669}$  و  $p_{670}$  و  $p_{671}$  و  $p_{672}$  و  $p_{673}$  و  $p_{674}$  و  $p_{675}$  و  $p_{676}$  و  $p_{677}$  و  $p_{678}$  و  $p_{679}$  و  $p_{680}$  و  $p_{681}$  و  $p_{682}$  و  $p_{683}$  و  $p_{684}$  و  $p_{685}$  و  $p_{686}$  و  $p_{687}$  و  $p_{688}$  و  $p_{689}$  و  $p_{690}$  و  $p_{691}$  و  $p_{692}$  و  $p_{693}$  و  $p_{694}$  و  $p_{695}$  و  $p_{696}$  و  $p_{697}$  و  $p_{698}$  و  $p_{699}$  و  $p_{700}$  و  $p_{701}$  و  $p_{702}$  و  $p_{703}$  و  $p_{704}$  و  $p_{705}$  و  $p_{706}$  و  $p_{707}$  و  $p_{708}$  و  $p_{709}$  و  $p_{710}$  و  $p_{711}$  و  $p_{712}$  و  $p_{713}$  و  $p_{714}$  و  $p_{715}$  و  $p_{716}$  و  $p_{717}$  و  $p_{718}$  و  $p_{719}$  و  $p_{720}$  و  $p_{721}$  و  $p_{722}$  و  $p_{723}$  و  $p_{724}$  و  $p_{725}$  و  $p_{726}$  و  $p_{727}$  و  $p_{728}$  و  $p_{729}$  و  $p_{730}$  و  $p_{731}$  و  $p_{732}$  و  $p_{733}$  و  $p_{734}$  و  $p_{735}$  و  $p_{736}$  و  $p_{737}$  و  $p_{738}$  و  $p_{739}$  و  $p_{740}$  و  $p_{741}$  و  $p_{742}$  و  $p_{743}$  و  $p_{744}$  و  $p_{745}$  و  $p_{746}$  و  $p_{747}$  و  $p_{748}$  و  $p_{749}$  و  $p_{750}$  و  $p_{751}$  و  $p_{752}$  و  $p_{753}$  و  $p_{754}$  و  $p_{755}$  و  $p_{756}$  و  $p_{757}$  و  $p_{758}$  و  $p_{759}$  و  $p_{760}$  و  $p_{761}$  و  $p_{762}$  و  $p_{763}$  و  $p_{764}$  و  $p_{765}$  و  $p_{766}$  و  $p_{767}$  و  $p_{768}$  و  $p_{769}$  و  $p_{770}$  و  $p_{771}$  و  $p_{772}$  و  $p_{773}$  و  $p_{774}$  و  $p_{775}$  و  $p_{776}$  و  $p_{777}$  و  $p_{778}$  و  $p_{779}$  و  $p_{780}$  و  $p_{781}$  و  $p_{782}$  و  $p_{783}$  و  $p_{784}$  و  $p_{785}$  و  $p_{786}$  و  $p_{787}$  و  $p_{788}$  و  $p_{789}$  و  $p_{790}$  و  $p_{791}$  و  $p_{792}$  و  $p_{793}$  و  $p_{794}$  و  $p_{795}$  و  $p_{796}$  و  $p_{797}$  و  $p_{798}$  و  $p_{799}$  و  $p_{800}$  و  $p_{801}$  و  $p_{802}$  و  $p_{803}$  و  $p_{804}$  و  $p_{805}$  و  $p_{806}$  و  $p_{807}$  و  $p_{808}$  و  $p_{809}$  و  $p_{810}$  و  $p_{811}$  و  $p_{812}$  و  $p_{813}$  و  $p_{814}$  و  $p_{815}$  و  $p_{816}$  و  $p_{817}$  و  $p_{818}$  و  $p_{819}$  و  $p_{820}$  و  $p_{821}$  و  $p_{822}$  و  $p_{823}$  و  $p_{824}$  و  $p_{825}$  و  $p_{826}$  و  $p_{827}$  و  $p_{828}$  و  $p_{829}$  و  $p_{830}$  و  $p_{831}$  و  $p_{832}$  و  $p_{833}$  و  $p_{834}$  و  $p_{835}$  و  $p_{836}$  و  $p_{837}$  و  $p_{838}$  و  $p_{839}$  و  $p_{840}$  و  $p_{841}$  و  $p_{842}$  و  $p_{843}$  و  $p_{844}$  و  $p_{845}$  و  $p_{846}$  و  $p_{847}$  و  $p_{848}$  و  $p_{849}$  و  $p_{850}$  و  $p_{851}$  و  $p_{852}$  و  $p_{853}$  و  $p_{854}$  و  $p_{855}$  و  $p_{856}$  و  $p_{857}$  و  $p_{858}$  و  $p_{859}$  و  $p_{860}$  و  $p_{861}$  و  $p_{862}$  و  $p_{863}$  و  $p_{864}$  و  $p_{865}$  و  $p_{866}$  و  $p_{867}$  و  $p_{868}$  و  $p_{869}$  و  $p_{870}$  و  $p_{871}$  و  $p_{872}$  و  $p_{873}$  و  $p_{874}$  و  $p_{875}$  و  $p_{876}$  و  $p_{877}$  و  $p_{878}$  و  $p_{879}$  و  $p_{880}$  و  $p_{881}$  و  $p_{882}$  و  $p_{883}$  و  $p_{884}$  و  $p_{885}$  و  $p_{886}$  و  $p_{887}$  و  $p_{888}$  و  $p_{889}$  و  $p_{890}$  و  $p_{891}$  و  $p_{892}$  و  $p_{893}$  و  $p_{894}$  و  $p_{895}$  و  $p_{896}$  و  $p_{897}$  و  $p_{898}$  و  $p_{899}$  و  $p_{900}$  و  $p_{901}$  و  $p_{902}$  و  $p_{903}$  و  $p_{904}$  و  $p_{905}$  و  $p_{906}$  و  $p_{907}$  و  $p_{908}$  و  $p_{909}$  و  $p_{910}$  و  $p_{911}$  و  $p_{912}$  و  $p_{913}$  و  $p_{914}$  و  $p_{915}$  و  $p_{916}$  و  $p_{917}$  و  $p_{918}$  و  $p_{919}$  و  $p_{920}$  و  $p_{921}$  و  $p_{922}$  و  $p_{923}$  و  $p_{924}$  و  $p_{925}$  و  $p_{926}$  و  $p_{927}$  و  $p_{928}$  و  $p_{929}$  و  $p_{930}$  و  $p_{931}$  و  $p_{932}$  و  $p_{933}$  و  $p_{934}$  و  $p_{935}$  و  $p_{936}$  و  $p_{937}$  و  $p_{938}$  و  $p_{939}$  و  $p_{940}$  و  $p_{941}$  و  $p_{942}$  و  $p_{943}$  و  $p_{944}$  و  $p_{945}$  و  $p_{946}$  و  $p_{947}$  و  $p_{948}$  و  $p_{949}$  و  $p_{950}$  و  $p_{951}$  و  $p_{952}$  و  $p_{953}$  و  $p_{954}$  و  $p_{955}$  و  $p_{956}$  و  $p_{957}$  و  $p_{958}$  و  $p_{959}$  و  $p_{960}$  و  $p_{961}$  و  $p_{962}$  و  $p_{963}$  و  $p_{964}$  و  $p_{965}$  و  $p_{966}$  و  $p_{967}$  و  $p_{968}$  و  $p_{969}$  و  $p_{970}$  و  $p_{971}$  و  $p_{972}$  و  $p_{973}$  و  $p_{974}$  و  $p_{975}$  و  $p_{976}$  و  $p_{977}$  و  $p_{978}$  و  $p_{979}$  و  $p_{980}$  و  $p_{981}$  و  $p_{982}$  و  $p_{983}$  و  $p_{984}$  و  $p_{985}$  و  $p_{986}$  و  $p_{987}$  و  $p_{988}$  و  $p_{989}$  و  $p_{990}$  و  $p_{991}$  و  $p_{992}$  و  $p_{993}$  و  $p_{994}$  و  $p_{995}$  و  $p_{996}$  و  $p_{997}$  و  $p_{998}$  و  $p_{999}$  و  $p_{1000}$  و  $p_{1001}$  و  $p_{1002}$  و  $p_{1003}$  و  $p_{1004}$  و  $p_{1005}$  و  $p_{1006}$  و  $p_{1007}$  و  $p_{1008}$  و  $p_{1009}$  و  $p_{1010}$  و  $p_{1011}$  و  $p_{1012}$  و  $p_{1013}$  و  $p_{101$

أ- \* - ليكن  $a$  و  $b$  و  $c$  من  $\mathbb{Z}^*$

$$a \vee b = b \vee a$$

$$(a \vee b)|c| = ac \vee bc$$

$$a \wedge a = |a|$$

$$b/a \Leftrightarrow a \vee b = |a|$$

ب- \* - ليكن  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{Z}^*$  و  $a \vee b = m$

كل مضاعف مشترك لـ  $a$  و  $b$  هو مضاعف للعدد  $m$

ج- مبرهنة

ليكن  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{Z}^*$  و  $a \vee b = m$  و  $a \wedge b = \delta$

$$m\delta = |ab|$$

نتيجة

ليكن  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{Z}^*$

$$a \wedge b = 1 \Leftrightarrow a \vee b = |ab|$$

خاصية

ليكن  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{Z}^*$  حيث  $a = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$  و  $b = \varepsilon p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \dots \times p_k^{\beta_k}$  وحيث  $p_1, p_2, \dots, p_n$  أعداد أولية

المضاعف المشترك الأصغر للعددين  $a$  و  $b$  هو العدد  $m = p_1^{\lambda_1} \times p_2^{\lambda_2} \times \dots \times p_k^{\lambda_k}$  حيث  $\lambda_i = \sup(\alpha_i, \beta_i)$  و  $i$  تنتمي  $\{1; 2; \dots; k\}$

مثال حدد  $180 \vee 1170$

3- المضاعف المشترك لعدة أعداد

تعريف

$a_1$  و  $a_2$  و  $a_3$  و  $a_k$  أعداد من  $\mathbb{Z}^*$

أصغر مضاعف مشترك موجب للأعداد  $a_1$  و  $a_2$  و  $a_3$  و  $a_k$  يسمى المضاعف المشترك الأصغر لـ  $a_1$

و  $a_2$  و  $a_3$  و  $a_k$

و استنتج عدد قواسم عدد صحيح نسبي

III- الموافقة بترديد  $n$

1- تعريف

ليكن  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{Z}$  و  $n$  من  $\mathbb{N}$

نقول إن  $a$  يوافق  $b$  بترديد  $n$  و نكتب  $a \equiv b [n]$  إذا كان  $n$  يقسم  $a - b$

$$\forall (a; b) \in \mathbb{Z}^2 \quad a \equiv b [n] \Leftrightarrow n/a - b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad a - b = kn$$

2- خاصيات العلاقة " الموافقة بترديد  $n$ "

أ-  $[n] \quad a \equiv a \quad \forall a \in \mathbb{Z}$  نقول إن العلاقة " الموافقة بترديد  $n$ " انعكاسية

ب-  $[n] \quad b \equiv a \quad [n] \Rightarrow a \equiv b \quad \forall (a; b) \in \mathbb{Z}$  نقول إن العلاقة " الموافقة بترديد  $n$ " تماثلية

ج-  $[n] \quad a \equiv c \quad [n] \Rightarrow a \equiv b \quad [n] \text{ et } b \equiv c \quad [n] \Rightarrow a \equiv c \quad \forall (a; b) \in \mathbb{Z}$  نقول إن العلاقة " الموافقة بترديد  $n$ " متعدية

نلخص الخاصيات أ و ب و ج بقولنا إن العلاقة " الموافقة بترديد  $n$ " علاقة تكافؤ

د- خاصية

ليكن  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{Z}$  و  $n$  من  $\mathbb{N}$

$a \equiv b [n]$  تكافؤ  $a$  و  $b$  لهما نفس باقي القسمة الاقليدية على  $n$

البرهان

- ليكن  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{Z}$  و  $n$  من  $\mathbb{N}$  بحيث  $a = nq_1 + r_1$  و  $b = nq_2 + r_2$  مع  $0 \leq r_1 < n$  و  $0 \leq r_2 < n$  ❖  
 إذا كان  $a$  و  $b$  لهما نفس باقي القسمة الاقليدية على  $n$  أي  $r_1 = r_2$  فان  $a - b = n(q_1 - q_2)$   
 أي أن  $a \equiv b \pmod{n}$   
 ❖ عكسيا إذا كان  $a \equiv b \pmod{n}$  فانه يوجد  $k$  من  $\mathbb{Z}$  حيث  $a - b = nk$   
 و منه  $r_1 - r_2 = (k - q_1 - q_2)n$  أي  $n$  يقسم  $r_1 - r_2$   
 ولدينا  $0 \leq r_1 < n$  و  $0 \leq r_2 < n$  و منه  $|r_1 - r_2| < n$   
 وبالتالي  $r_1 - r_2 = 0$  أي  $r_1 = r_2$

### 3- المجموعة $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

- \*  $\forall (a;n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \exists (q;r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} a = nq + r$  et  $0 \leq r < n$   
 - \*  $\forall (a;n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \exists r \in \mathbb{N} a \equiv r \pmod{n}$  et  $r \in \{0;1; \dots; n-1\}$   
 - المجموعة  $\{x \in \mathbb{Z} / x \equiv r \pmod{n}\}$  هي مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية التي لها نفس الباقي  $r$  في القسمة الاقليدية على  $n$  نرمز لها بـ  $\bar{r}$   
 المجموعة  $\bar{r}$  تسمى صنف تكافؤ  $r$  بالنسبة للعلاقة " الموافقة بتريديد  $n$  " في  $\mathbb{Z}$   
 - \*  $x \in \bar{r} \Leftrightarrow x \equiv r \pmod{n}$   
 - \*  $\forall a \in \mathbb{Z} \exists r \in \{0;1; \dots; n-1\} / a \equiv r \pmod{n}$  أي  $\bar{a} \equiv \bar{r}$   
 - \* إذا كان  $\bar{r} = \bar{r}'$  و  $0 \leq r < n$  و  $0 \leq r' < n$  فان  $r = r'$   
 - \*  $\forall (x;n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \exists r \in \{0;1; \dots; n-1\} / x \in \bar{r}$  (  $r$  باقي القسمة الاقليدية على  $n$  )

$$\mathbb{Z} = \bar{0} \cup \bar{1} \cup \bar{2} \cup \dots \cup \overline{(n-1)}$$

المجموعة  $\{\bar{0}; \bar{1}; \dots; \overline{(n-1)}\}$  برمز لها بالرمز  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

عناصر  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  منفصلة مثنى مثنى

أمثلة

- \*  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}\}$  حيث  $\bar{0} = 2 \cdot \mathbb{Z}$  و  $\bar{1} = \{x \in \mathbb{Z} / x = 2k + 1 \ (k \in \mathbb{Z})\}$   
 \*  $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \bar{3}; \bar{4}; \bar{5}; \bar{6}\}$  حيث  $\bar{0} = 7 \cdot \mathbb{Z}$  و  $\bar{1} = \{x \in \mathbb{Z} / x = 7k + 1 \ (k \in \mathbb{Z})\}$   
 و  $\bar{2} = \{x \in \mathbb{Z} / x = 7k + 2 \ (k \in \mathbb{Z})\}$  و  $\bar{3} = \{x \in \mathbb{Z} / x = 7k + 3 \ (k \in \mathbb{Z})\}$   
 و ..... و  $\bar{6} = \{x \in \mathbb{Z} / x = 7k + 6 \ (k \in \mathbb{Z})\}$   
 في  $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$  لدينا  $532 = \bar{4}$  لأن  $532 \equiv 4 \pmod{7}$   
 $-36 = \bar{6}$  لأن  $-36 \equiv 6 \pmod{7}$

### 4- انسجام العلاقة " الموافقة بتريديد $n$ " مع الجمع والضرب أ- خاصية

ليكن  $x$  و  $y$  و  $z$  و  $t$  من  $\mathbb{Z}$  و  $n$  من  $\mathbb{N}$   
 إذا كان  $x \equiv y \pmod{n}$  و  $z \equiv t \pmod{n}$  فان  $x + z \equiv y + t \pmod{n}$   
 إذا كان  $x \equiv y \pmod{n}$  و  $z \equiv t \pmod{n}$  فان  $x \times z \equiv y \times t \pmod{n}$   
 نقول إن العلاقة " الموافقة بتريديد  $n$  " منسجمة مع الجمع والضرب

ب- نتائج

- \* إذا كانت  $x \in \bar{r}$  و  $x' \in \bar{r}'$  فان  $x + x' \in \overline{r+r'}$  و  $x \times x' \in \overline{r \times r'}$  نكتب  $\overline{r+r'} = \overline{r} + \overline{r'}$   
 و  $\overline{r \times r'} = \overline{r} \times \overline{r'}$   
 -\*  $\forall (a;b) \in \mathbb{Z}^2 \quad \forall (p;n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \quad a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow a^p \equiv b^p \pmod{n}$

أمثلة



$$\bar{3} \times \bar{4} = \overline{12} = \bar{2} \quad , \quad \bar{0} + \bar{1} + \bar{2} + \bar{3} + \bar{4} = \overline{10} = \bar{0} \quad , \quad \bar{3} + \bar{4} = \bar{7} = \bar{2} \quad \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \text{ في } *$$

تمرين

$$\bar{x} + \bar{5} = \bar{2} \quad \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \text{ حدد مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية } x \text{ حيث في}$$

تمرين

$$-1 \text{ أعط جدول الجمع ثم الضرب في } \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$$

$$-2 \text{ بين أن العدد } 2^{70} + 3^{70} \text{ قابلة للقسمة على } 13$$

تمرين

$$-3 \text{ بين أن } [n] \equiv 0 \pmod{n(n^4 - 1)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$-4 \text{ بين أن } 17 \text{ يقسم } 3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2} \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}^*$$

$$-3 \text{ ليكن } n \text{ من } \mathbb{N} \text{ ، حدد بواقي القسمة الاقليدية للأعداد } 1^n + 2^n + 3^n + 4^n \text{ على } 4$$