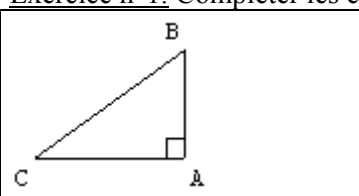
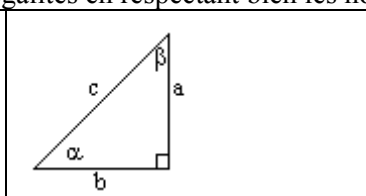
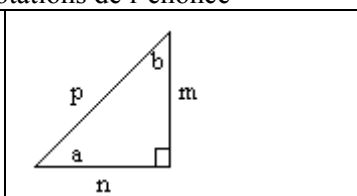


TRIGONOMETRIE - EXERCICES CORRIGES**Trigonométrie rectangle**

Exercice n°1. Compléter les égalités en respectant bien les notations de l'énoncé

		
$\cos \widehat{ABC} =$ $\sin \widehat{ABC} =$ $\tan \widehat{ABC} =$ $\cos \widehat{ACB} =$ $\sin \widehat{ACB} =$ $\tan \widehat{ACB} =$	$\cos \alpha =$ $\sin \alpha =$ $\tan \alpha =$ $\cos \beta =$ $\sin \beta =$ $\tan \beta =$	$\cos a =$ $\sin a =$ $\tan a =$ $\cos b =$ $\sin b =$ $\tan b =$

Exercice n°2.

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB=3$ et $\widehat{ABC} = 30^\circ$. Calculer BC et AB

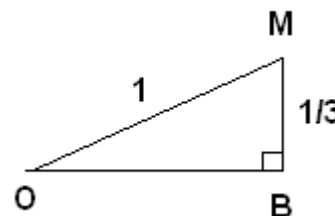
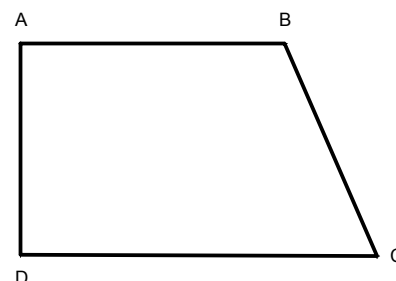
Exercice n°3.

Les dimensions du triangle OBM sont données sur la figure :

Entourer parmi les données suivantes, celles qui sont correctes

$$OB = \frac{2}{3} \quad \sin \widehat{BMO} = \frac{1}{3} \quad OB = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\sin \widehat{BOM} = \frac{1}{3} \quad \cos \widehat{BOM} = \frac{2}{3} \quad (\sin \widehat{BOM})^2 + (\cos \widehat{BOM})^2 = 1$$

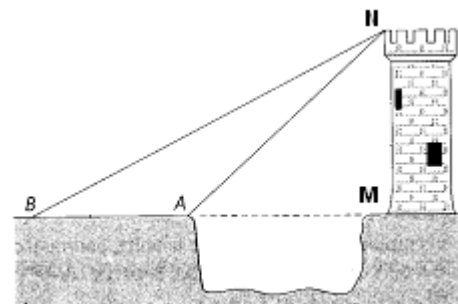
Exercice n°4. Le trapèze rectangle ABCD ci-contre est tel que $AB = 5$ cm , $AD = 4$ cm et $\widehat{DCB} = 60^\circ$ Déterminer les valeurs exactes du périmètre et de l'aire de ce trapèze.

Exercice n°5.

Une tour est protégée par un large fossé. En se situant en A, l'angle \widehat{MAN} vaut 42° . En reculant de 10 mètres ($AB = 10$) et en se positionnant en B, l'angle \widehat{MBN} vaut 27° . Les triangles AMN et BMN sont rectangles en M.

1) En exprimant MN en fonction de AM de deux façons différentes (utiliser le fait que $BM=BA+AM$), calculer la longueur AM

2) En déduire la hauteur de la tour (on donnera une valeur exacte, puis valeur approchée à un centimètre près.)

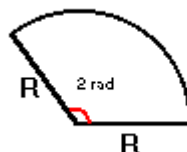
**Le radian**

Exercice n°6.

Convertir en degrés : 1) $\frac{\pi}{3}$ rad 2) $\frac{\pi}{2}$ rad 3) $\frac{5\pi}{6}$ rad 4) $\frac{5\pi}{9}$ rad 5) $\frac{5\pi}{36}$ radConvertir en radians : 6) 45° 7) 120° 8) 30° 9) 40° 10) 125°

Exercice n°7.

Exprimer, en fonction de R, le périmètre de la figure :



Exercice n°8.

Soit C et C' deux cercles de centre O , de rayons respectifs R et R' ($R' < R$) et A et B deux points distincts de C .

Pour aller de A à B , deux trajets sont possibles :

Trajet 1 : de A à B sur le cercle C

Trajet 2 : de A à A' , puis de A' à B' sur le cercle C' , et enfin de B' à B .

(la figure est indicative, et ne correspond pas aux mesures suivantes)

1) On suppose que $R=150$, $R'=50$ et $\alpha = 1 \text{ rad}$.

Lequel de ces deux trajets est le plus court ?

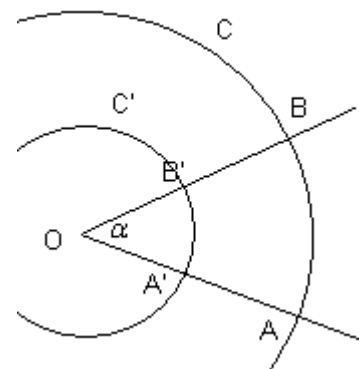
2) On suppose que $R=300$, $R'=250$ et $\alpha = 3 \text{ rad}$.

Lequel de ces deux trajets est le plus court ?

3) Trouver une condition sur α pour que :

a) les deux trajets aient même longueur.

b) Le trajet 2 soit plus grand que le trajet 1.

**Arcs et angles orientés**Exercice n°9.

Donner **une** mesure en **radians** de l'angle formé par la petite aiguille et la grande aiguille d'une montre (plusieurs réponses sont possibles)

- 1) à 3 h 2) à 1 h 3) à 4 h
4) à 6 h 5) à 8 h

Exercice n°10.

1) Placer, sur le cercle trigonométriques ci-dessous les points M tels que

$$(\overline{OI}, \overline{OM}) = \frac{27\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

2) Placer, sur le cercle trigonométriques ci-dessous les points N tels que $(\overline{OI}, \overline{ON}) = -\frac{38\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

3) Placer, sur le cercle trigonométriques ci-dessous les points P $(\overline{OI}, \overline{OP}) = x$ avec $3x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Exercice n°11.

Soit (C) un cercle de centre A et B un point de (C)

1) Construire les points C, D, E et F du cercle (C) tels que :

$$(\overline{AB}, \overline{AC}) = \frac{\pi}{3} \quad (\overline{AB}, \overline{AD}) = \frac{3\pi}{4} \quad (\overline{AB}, \overline{AE}) = \frac{7\pi}{6} \quad (\overline{AB}, \overline{AF}) = -\frac{3\pi}{4}$$

2) Déterminer une mesure puis la mesure principale de chacun des angles orientés suivants :

$$(\overline{AC}, \overline{AE}) \quad (\overline{AD}, \overline{AF}) \quad (\overline{AF}, \overline{AC}) \quad (\overline{AF}, \overline{AE})$$

Exercice n°12.

ACE est un triangle isocèle direct de sommet principal A et tel que $AC=5$ et $(\overline{AC}, \overline{AE}) = \frac{2\pi}{5} (2\pi)$

1) Tracez le triangle équilatéral direct AEF et le triangle ABC isocèle rectangle direct en A .

2) Déterminer la mesure principale de chacun des angles orientés suivants :

$$(\overline{AF}, \overline{AB}) \quad (\overline{EF}, \overline{BC}) \quad (\overline{AF}, \overline{CB}) \quad (\overline{AF}, \overline{EC})$$

Angles associésExercice n°13.

1) Sachant que $\begin{cases} \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \\ \sin x = \frac{1}{3} \end{cases}$, et sans utiliser de calculatrice, donner une valeur **exacte** de $\cos x$ et de $\tan x$

2) Tout le monde sait bien que $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ (on ne cherchera pas à démontrer ce résultat !). Calculer $\sin \frac{\pi}{8}$

Exercice n°14.

Pour tout réel x , simplifier l'expression $A(x) = \cos(3\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin\left(-\frac{3\pi}{2} - x\right)$

Exercice n°15.

1) Déterminer la mesure de l'angle x vérifiant :

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

2) Sachant que $\cos \frac{\pi}{10} = \frac{1}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$ (on ne cherchera pas à démontrer ce résultat !), déterminer $\cos \frac{11\pi}{10}$

3) Déterminer une valeur **exacte** de x sachant que $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos x = -\frac{1}{2}$

4) Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près en radians de a sachant que $\cos a = -0,25$ et $a \in [-\pi; 0]$

Calcul algébriques à l'aide d'expressions trigonométriquesExercice n°16.

1) Simplifier au maximum, pour tout réel t , l'expression $(1 - \cos t)(1 + \cos t)$

2) Démontrez que pour tout nombre réel x , $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x$ puis que $\cos^4 x - \sin^4 x = 2 \cos^2 x - 1$

Exercice n°17.

1) Démontrer que pour tout réel x , $\cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1$

2) Puisque vous connaissez $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$, déterminez une valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ puis de $\cos\left(\frac{\pi}{24}\right)$

Equations et inéquations trigonométriquesExercice n°18.

Résoudre dans \mathbb{R} les équations et inéquations suivantes :

$$\begin{array}{lll} \cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} & & \sin(3x) = \frac{1}{2} \\ \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) & \cos(2x) = \sin(3x) & \cos(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ & & \sin(3x) > \frac{1}{2} \end{array}$$
Exercice n°19.

1) Exprimer $\cos a \cos b$ en fonction de $\cos(a + b)$ et $\cos(a - b)$

2) En effectuant un changement de variable que l'on précisera, démontrez que pour tous nombres réels p et q , on a :

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

3) En déduire les solutions de l'équation $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$

Exercice n°20.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -4x^3 + 3x - \frac{1}{2}$

1) Faire une étude complète de la fonction f (limites, sens de variation, etc...), dressez son tableau de variations, et tracez sa courbe représentative C dans un repère orthonormal (unité de longueur 4 cm)

2) Trouvez les solutions dans $[0; 2\pi]$ de l'équation, d'inconnue a $\sin 3a = \frac{1}{2}$. Représentez sur un cercle trigonométrique les points associés à ces solutions

3) Montrez que pour tout nombre réel a , $\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$

4) Déduisez de la question 2) les solutions de l'équation $f(x) = 0$. Donnez-en des valeurs approchées à 0,1 près

Fonctions trigonométriquesExercice n°21.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \sin 2x$

On note (C) la représentation graphique de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- 1) Calculer $f(0); f(\frac{\pi}{6}); f(\frac{\pi}{12}); f(\frac{\pi}{2}); f(\frac{\pi}{8}); f(\pi)$
- 2) Montrer que f est impaire. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative (C) ?
- 3) Soit x un nombre réel. Comparer $f(x + \pi)$ et $f(x)$. Que peut-on en déduire pour f ?
- 4) Démontrez que la fonction f est strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]$ puis strictement décroissante sur $[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}]$
- 5) Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}]$

Trigonométrie et limitesExercice n°22.

On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = 2x - \sin x$

- 1) Montrer que pour tout x réel $2x - 1 \leq f(x) \leq 2x + 1$
- 2) En déduire les limites de f lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$

Exercice n°23.

Déterminer, à l'aide des théorèmes de comparaison, les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de chacune des fonctions f suivantes (si elles existent):

$$1) f(x) = \frac{1 + \cos x}{\sqrt{x}} \quad 2) f(x) = \frac{x \sin x}{x^2 + 1};$$

Exercice n°24.

Soit x un réel de $]0; \frac{\pi}{2}[$. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$,

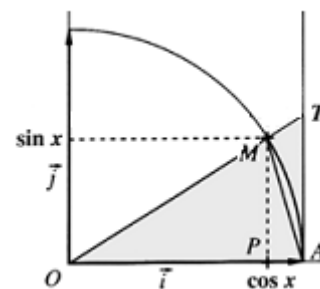
on considère les points : $A(1;0)$, $M(\cos x; \sin x)$, $P(\cos x;0)$. On considère de plus le point T intersection de (OM) et de la perpendiculaire à (OA) en A

- 1) Montrer que $AT = \tan x$
- 2) Soit A_1 l'aire du triangle OAM , A_2 l'aire du secteur de disque OAM et A_3 l'aire du triangle OAT .

En comparant ces aires, prouver que : $\sin x \leq x \leq \tan x$.

$$3) \text{ En déduire que } \cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1.$$

$$4) \text{ Déterminer } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sin x}{x}.$$

Exercice n°25.

En utilisant le résultat $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (cf exercice précédent), étudiez les limites en 0 des fonctions :

$$1) x \rightarrow \frac{\sin 5x}{2x} \quad 2) x \rightarrow \frac{x}{\sin 3x} \quad 3) x \rightarrow \frac{\sin 5x}{\sin 4x} \quad 4) x \rightarrow \frac{\tan x}{x}$$

Calculs de dérivéesExercice n°26.

Dans chacun des cas suivants, calculer la fonction dérivée de la fonction f en précisant le domaine de définition et le domaine de dérivabilité.

1) $f(x) = x \cos x - 2 \sin x$	2) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$	3) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$	4) $f(x) = \cos(3x) - \sin(2x)$
---------------------------------	------------------------------	-----------------------------------	---------------------------------

Exercice n°27.

En utilisant la définition du nombre dérivé, déterminer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$$

Exercice n°28. Dérivée $n^{\text{ième}}$ Calculer les dérivées d'ordre 1 à n , $n \in \mathbb{N}$, de f sur l'intervalle I , avec $f(x) = \cos 3x$ et $I = \mathbb{R}$ **Trigonométrie et intégration**Exercice n°29.Déterminer une primitive de f sur un intervalle contenu dans son ensemble de définition

1) $f(x) = \sin x - 2 \cos x$

2) $f(x) = \sin x \cos x$

3) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$

4) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$

5) $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{2 + \sin x}}$

6) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$ sur $I =]0; \frac{\pi}{2}[$

7) $f(x) = \tan x$ sur $]\frac{\pi}{2}; \pi]$

Exercice n°30. Vrai ou Faux ?

1) $\int_0^{\pi} \sin x \cos x dx = 0$

2) $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \frac{1}{3}$.

3) $\int_0^{-\pi} \sin^4 x dx = \int_0^{\pi} \sin^4 x dx$.

Exercice n°31.

Etablir que $\int_0^1 x^2 \sin x dx \leq \int_0^1 x \sin x dx$

Exercice n°32.1) Calculez l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$ en utilisant la formule d'intégration par parties:Calculez l'intégrale I en utilisant deux fois le théorème de l'intégration par parties:

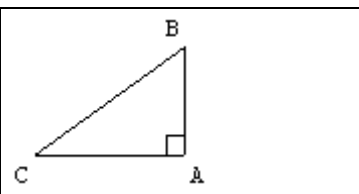
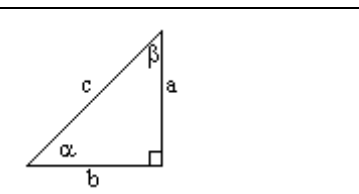
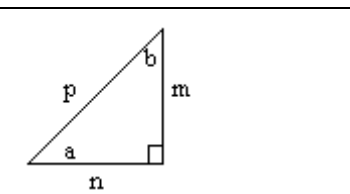
2) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$

3) $I = \int_0^{\pi} e^x \sin x dx$

4) $I = \int_0^{\pi} e^{2x} \cos x dx$

TRIGONOMETRIE - CORRECTION**Trigonométrie rectangle****Exercice n°1**

Dans un triangle rectangle, $\sin x = \frac{\text{coté opposé}}{\text{hypoténuse}}$, $\cos x = \frac{\text{coté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$ et $\tan x = \frac{\text{coté opposé}}{\text{coté adjacent}}$. Ainsi

		
$\cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC}$ $\sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC}$ $\tan \widehat{ABC} = \frac{AC}{AB}$ $\cos \widehat{ACB} = \frac{AC}{BC}$ $\sin \widehat{ACB} = \frac{AB}{BC}$ $\tan \widehat{ACB} = \frac{AB}{AC}$	$\cos \alpha = \frac{b}{c}$ $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ $\tan \alpha = \frac{a}{b}$ $\cos \beta = \frac{a}{c}$ $\sin \beta = \frac{b}{c}$ $\tan \beta = \frac{b}{a}$	$\cos a = \frac{n}{p}$ $\sin a = \frac{m}{p}$ $\tan a = \frac{m}{n}$ $\cos b = \frac{m}{p}$ $\sin b = \frac{n}{p}$ $\tan b = \frac{n}{m}$

Exercice n°2

Dans le triangle ABC, rectangle en A, on peut écrire $\cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC}$, d'où :

$$BC = \frac{AB}{\cos \widehat{ABC}} = \frac{3}{\cos 30^\circ} = \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}. \text{ De plus } \sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC} \text{ d'où } AC = BC \sin 30^\circ = 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \sqrt{3}$$

Exercice n°3

Les affirmations vraies sont :

$OB = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. En effet, on calcule la longueur OB dans le triangle rectangle grâce

au théorème de Pythagore : $OB^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$ donc $OB = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

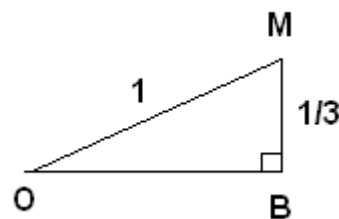
$$\sin \widehat{BOM} = \frac{BM}{OM} = \frac{1}{3}$$

$(\sin \widehat{BOM})^2 + (\cos \widehat{BOM})^2 = 1$ (ceci est **toujours vrai** quel que soit l'angle)

Les autres affirmations sont fausses. En effet $OB = \frac{2}{3}$ est faux puisque $OB = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ (voir ci-dessus)

$$\cos \widehat{BOM} = \frac{2}{3} \text{ est faux car } \cos \widehat{BOM} = \frac{OB}{OM} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{1} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\sin \widehat{BMO} = \frac{1}{3} \text{ est faux car } \sin \widehat{BMO} = \frac{OB}{OM} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{1} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

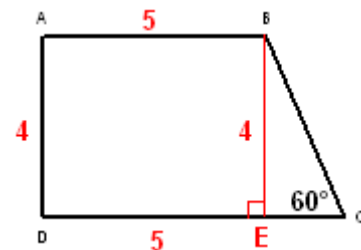


Exercice n°4

Notons E le projeté orthogonal de B sur [CD]. Dans le triangle BEC, rectangle en E, on a :

$$\frac{BE}{EC} = \tan(\widehat{BCE}) = \tan(60^\circ) \text{ donc } EC = \frac{4}{\tan(60^\circ)} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{De plus, } \frac{BE}{BC} = \sin(\widehat{BCE}) = \sin(60^\circ) \text{ donc } BC = \frac{4}{\sin(60^\circ)} = \frac{4}{\sqrt{3}/2} = \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$



$$\text{On en déduit que le périmètre du trapèze est égal à } 5+4+5+EC+BC, \text{ soit } 14 + \frac{4}{\tan(60^\circ)} + \frac{4}{\sin(60^\circ)} = \frac{42+12\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{L'aire du trapèze vaut } \frac{\overbrace{5 + \frac{4}{\tan(60^\circ)}}^{\text{Grande base}} + \underbrace{5}_{\text{Petite base}}}{2} \times \underbrace{4}_{\text{hauteur}} = 20 + \frac{8}{\tan(60^\circ)} = 20 + \frac{8}{\sqrt{3}} = 20 + \frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{60+8\sqrt{3}}{3}$$

Exercice n°5

$$1) \text{ Dans le triangle AMN, rectangle en M, on écrit } \frac{MN}{AM} = \tan(42^\circ) \Leftrightarrow MN = AM \tan(42^\circ)$$

$$\text{Dans le triangle MMN, rectangle en M, on écrit } \frac{MN}{BM} = \tan(27^\circ) \Leftrightarrow MN = BM \tan(27^\circ)$$

En utilisant le fait que $BM=BA+AM$, on écrit :

$$MN = BM \tan(27^\circ) = (10 + AM) \tan(27^\circ) = 10 \tan(27^\circ) + AM \tan(27^\circ)$$

Si par ailleurs $MN = AM \tan(42^\circ)$, on aura donc $AM \tan(42^\circ) = 10 \tan(27^\circ) + AM \tan(27^\circ)$, c'est-à-dire

$$AM (\tan(42^\circ) - \tan(27^\circ)) = 10 \tan(27^\circ) \text{ donc } AM = \frac{10 \tan(27^\circ)}{\tan(42^\circ) - \tan(27^\circ)}$$

$$2) \text{ On conclut donc que } MN = AM \tan(42^\circ) = \frac{10 \tan(27^\circ) \tan(42^\circ)}{\tan(42^\circ) - \tan(27^\circ)}$$

La calculatrice fournit $MN \approx 11,74 \text{ m}$

Le radianExercice n°6

$$\text{On applique la formule } \text{mesure en degré} = \frac{\text{mesure en radian} \times 180}{\pi}$$

1) $\frac{\pi}{3} \text{ rad} \leftrightarrow 60^\circ$	2) $\frac{\pi}{2} \text{ rad} \leftrightarrow 90^\circ$	3) $\frac{5\pi}{6} \text{ rad} \leftrightarrow 150^\circ$	4) $\frac{5\pi}{9} \text{ rad} \leftrightarrow 100^\circ$	5) $\frac{5\pi}{36} \text{ rad} \leftrightarrow 25^\circ$
---	---	---	---	---

$$\text{On applique la formule } \text{mesure en radians} = \frac{\text{mesure en degrés} \times \pi}{180}$$

6) $45^\circ \leftrightarrow \frac{\pi}{4} \text{ rad}$	7) $120^\circ \leftrightarrow \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$	8) $30^\circ \leftrightarrow \frac{\pi}{6} \text{ rad}$	9) $40^\circ \leftrightarrow \frac{2\pi}{9} \text{ rad}$	10) $125^\circ \leftrightarrow \frac{25\pi}{36} \text{ rad}$
---	---	---	--	--

Exercice n°7

Un angle au centre de α rad intercepte, sur un cercle de rayon R , un arc de mesure égale à $L = R \times \alpha$

L'arc de cercle intercepté mesure donc $2R$ unités de longueur. Le périmètre de la figure vaut donc $2R + R + R = 4R$ unités de longueur

Exercice n°8

Un angle au centre de α rad intercepte, sur un cercle de rayon R , un arc de mesure égale à $L = R \times \alpha$

1) Dans le premier cas ($R=150$, $R'=50$ et $\alpha = 1 \text{ rad}$), le trajet 1 a pour longueur $T_1 = 150 \times 1 = 150$ unités de longueur,

tandis que le trajet 2 a pour longueur $T_2 = AA' + 50 \times 1 + BB' = 250$ unités de longueur donc $T_1 < T_2$

2) Dans le deuxième cas ($R=300$, $R'=250$ et $\alpha = 3 \text{ rad}$), le trajet 1 a pour longueur $T_1 = 300 \times 3 = 900$ unités de longueur, tandis que le trajet 2 a pour longueur $T_2 = AA' + 250 \times 3 + BB' = 850$ unités de longueur donc $T_2 < T_1$

3) Les deux trajets seront de la même longueur si et seulement si :

$$\alpha R = AA' + \alpha R' + BB' \Leftrightarrow \alpha R = (R - R') + \alpha R' + (R - R')$$

(On remarque que cela ne dépend ni de R ni de R')

$$\Leftrightarrow \alpha(R - R') = 2(R - R') \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 2}$$






Le trajet 2 sera plus grand que le trajet 1 si et seulement si

$$\alpha R < AA' + \alpha R' + BB' \Leftrightarrow \alpha R < (R - R') + \alpha R' + (R - R')$$

$$\Leftrightarrow \alpha(R - R') < 2(R - R') \Leftrightarrow \boxed{\alpha < 2}$$

Arcs et angles orientés

Exercice n°9

				
à 3 h, une mesure de l'angle est $\frac{\pi}{2}$	à 1 h, une mesure de l'angle est $\frac{\pi}{6}$	à 4 h, une mesure de l'angle est $\frac{2\pi}{3}$	à 6 h, une mesure de l'angle est π	à 8 h, une mesure de l'angle est $\frac{2\pi}{3}$

Exercice n°10

(figure en fin d'exercice)

1) Puisque $\frac{27\pi}{6} = \frac{(24+3)\pi}{6} = \frac{24\pi}{6} + \frac{3\pi}{6} = 4\pi + \frac{\pi}{2} = 2 \times \frac{2\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$, on peut écrire que un tour dans le sens trigo

$$(\overline{OI}, \overline{OM}) = 2 \times 2\pi + \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} = \frac{\pi}{2} + 2l\pi, l \in \mathbb{Z}$$

2) Puisque $-\frac{38\pi}{3} = -\frac{(36+2)\pi}{3} = -12\pi - \frac{2\pi}{3} = 6 \times \underbrace{(-2\pi)}_{\text{un tour dans le sens trigo inverse}} - \frac{2\pi}{3}$, on peut écrire $(\overline{OI}, \overline{ON}) = 6 \times (-2\pi) - \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$= -\frac{2\pi}{3} + 2l\pi, l \in \mathbb{Z}$$

3) Attention à la division par 3 :

$$\text{Si } 3x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ alors } x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Pour } k = 0, \text{ on obtient } x_0 = -\frac{\pi}{6} \text{ (point } P_0)$$

$$\text{Pour } k = 1 \text{ on obtient } x_1 = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \text{ (point } P_1)$$

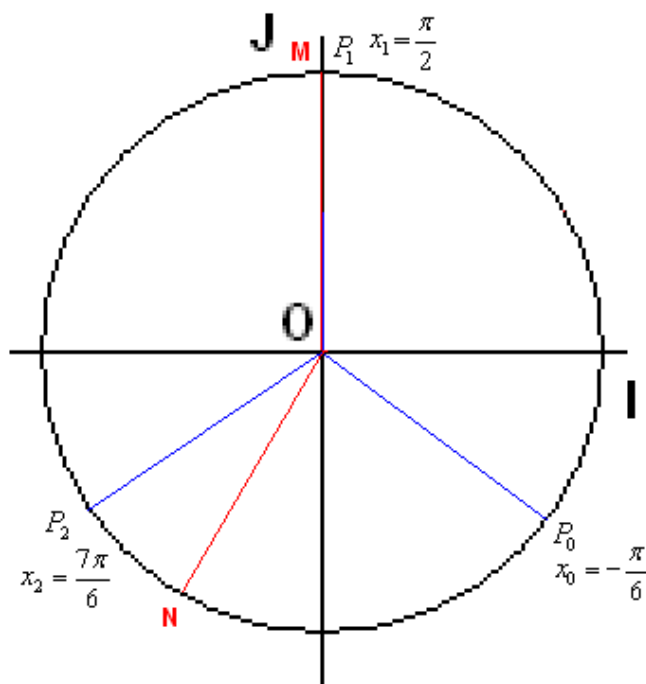
$$\text{Pour } k = 2 \text{ on obtient } x_2 = -\frac{\pi}{6} + \frac{2 \times 2\pi}{3} = \frac{7\pi}{6} \text{ (point } P_2)$$

$$\text{Pour } k = 3 \text{ on obtient } x_3 = -\frac{\pi}{6} + \frac{3 \times 2\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi.$$

On retombe sur le point P_0

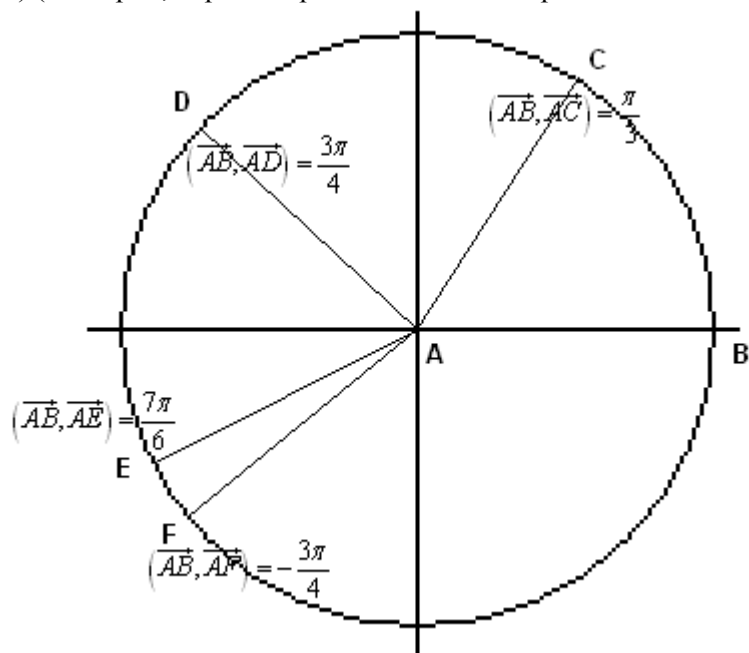
$$\text{De même, pour } k = -1 \text{ on obtient } x_{-1} = -\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{5\pi}{6}.$$

On retombe sur le point P_2



Exercice n°11

1) (Au départ, le point B peut être choisi n'importe où sur le cercle)



2) Par application de la relation de Chasles sur les angles orientés de vecteurs :

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})(2\pi)$$

$$= -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})(2\pi)$$

$$= -\frac{\pi}{3} + \frac{7\pi}{6}(2\pi)$$

$$\boxed{= \frac{5\pi}{6}(2\pi)}$$

$$(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})(2\pi)$$

$$= -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})(2\pi)$$

$$= -\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{3}(2\pi)$$

$$= \frac{13\pi}{12}(2\pi) \boxed{= -\frac{11\pi}{12}(2\pi)}$$

$$(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF}) = (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF})(2\pi)$$

$$= -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF})(2\pi)$$

$$= -\frac{3\pi}{4} + \left(-\frac{3\pi}{4}\right)(2\pi)$$

$$= -\frac{3\pi}{2}(2\pi) \boxed{= \frac{\pi}{2}(2\pi)}$$

$$(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AE}) = (\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})(2\pi)$$

$$= -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})(2\pi)$$

$$= -\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \frac{7\pi}{6}(2\pi)$$

$$= \frac{23\pi}{12}(2\pi) \boxed{= -\frac{\pi}{12}(2\pi)}$$

Exercice n°12

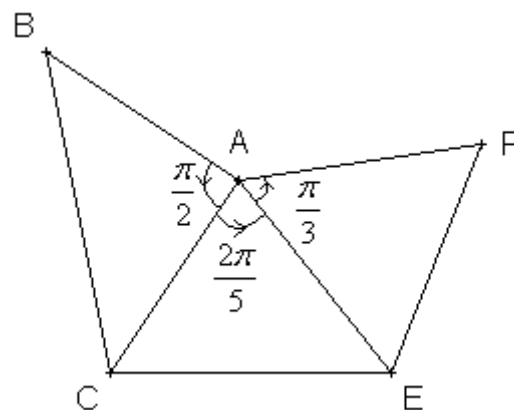
1) Si le triangle AEF est triangle équilatéral direct, alors AE=AF et

$$(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}) = \frac{\pi}{3}$$

Si le triangle ABC est isocèle rectangle direct en A, alors AB=AC et

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$$

2) Par application de la relation de Chasles sur les angles orientés de vecteurs, et de la propriété $(-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) - \pi(2\pi)$, on détermine :



$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB}) &= (\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AE}) + (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})(2\pi) \\ &= -\frac{\pi}{3} + \left(-\frac{2\pi}{5}\right) + \left(-\frac{\pi}{2}\right)(2\pi) \\ &= -\frac{37\pi}{30}(2\pi) = \boxed{\frac{23\pi}{30}(2\pi)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{CB}) &= (\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AE}) + (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB})(2\pi) \\ &= -\frac{\pi}{3} + \left(-\frac{2\pi}{5}\right) + (-\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})(2\pi) \\ &= -\frac{11\pi}{15} + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) - \pi(2\pi) \\ &= -\frac{11\pi}{15} + \frac{\pi}{4} - \pi(2\pi) = -\frac{89\pi}{60}(2\pi) = \boxed{\frac{31\pi}{60}(2\pi)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{BC}) &= (\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EA}) + (\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC}) + (\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{BC})(2\pi) \\ &= \frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{10} + (-\overrightarrow{CE}, -\overrightarrow{CB})(2\pi) \\ &= \frac{19\pi}{30} + (\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CB})(2\pi) = \frac{19\pi}{30} + \frac{3\pi}{10} + \frac{\pi}{4}(2\pi) \\ &= \frac{28\pi}{30} + \frac{\pi}{4}(2\pi) = \frac{71\pi}{60}(2\pi) = \boxed{-\frac{49\pi}{60}(2\pi)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{EC}) &= (\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AE}) + (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{EC})(2\pi) \\ &= (\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AE}) + (-\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC})(2\pi) \\ &= -\frac{\pi}{3} + (\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC}) - \pi(2\pi) \\ &= -\frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{10} - \pi(2\pi) = -\frac{31\pi}{30}(2\pi) = \boxed{\frac{29\pi}{30}(2\pi)}\end{aligned}$$

Angles associésExercice n°13

1) En appliquant la formule $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$, on peut écrire $(\cos x)^2 = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$, donc

$$\cos x = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ ou } \cos x = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}. \text{ Mais puisque } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \cos x \leq 0 \text{ donc } \boxed{\cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

$$\text{Par suite, } \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{3}{2\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{4}}$$

2) En appliquant la formule $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$, on peut écrire $\left(\sin \frac{\pi}{8}\right)^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2 = 1 - \frac{2+\sqrt{2}}{4} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$

$$\text{On devrait donc écrire } \sin \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} \text{ ou } \sin \frac{\pi}{8} = -\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$$

$$\text{MAIS puisque } 0 \leq \frac{\pi}{8} \leq \pi, \sin \frac{\pi}{8} \geq 0, \text{ de sorte que } \boxed{\sin \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}}$$

Exercice n°14

Pour tout réel x ,

$$\cos(3\pi - x) = \cos(2\pi + \pi - x) = \underbrace{\cos(\pi - x)}_{\text{formule connue}} = -\cos x, \quad \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}_{\text{car } \cos(u) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right) = \sin(-x) = -\sin x$$

$$\text{Enfin, } \underbrace{\sin\left(-\frac{3\pi}{2} - x\right)}_{\text{car } \sin(u) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{3\pi}{2} - x\right)\right) = \cos(2\pi + x) = \cos x$$

Ainsi

$$\begin{aligned}A(x) &= \cos(3\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin\left(-\frac{3\pi}{2} - x\right) \\ &= -\cos x - \sin x + \cos x \\ &= \boxed{-\sin x}\end{aligned}$$

Exercice n°15

1) Puisqu'on a l'équivalence $\sin a = \sin b \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ a = \pi - b + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ et puisque $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, on peut donc écrire que :

$$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi, l \in \mathbb{Z} \end{cases} \text{ . Mais l'énoncé impose } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \text{ on en déduit donc } \boxed{x = \frac{5\pi}{6}}$$

2) Puisque $\frac{11\pi}{10} = \pi + \frac{\pi}{10}$, on peut écrire $\cos\frac{11\pi}{10} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{10}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = -\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

3) Puisque $\sin x \geq 0$ et $\cos x \leq 0$, une mesure de l'angle se trouve dans le « quart Nord-Ouest », c'est-à-dire $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$

Puisqu'on a l'équivalence $\sin a = \sin b \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ a = \pi - b + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

et puisque $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, on peut donc écrire que :

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2l\pi, l \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Mais puisque l'énoncé impose $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$, on en déduit donc $\boxed{x = \frac{2\pi}{3}}$

4) La calculatrice a ici nous aider :



MAIS ATTENTION !

Puisque l'énoncé impose $a \in [-\pi; 0]$, il faut retenir celui des deux angles que la calculatrice ne nous donne pas, à savoir

$\boxed{a \approx -1,82 \text{ rad}}$ à 10^{-2} près

Calcul algébriques à l'aide d'expressions trigonométriquesExercice n°16

1) On développe : Pour tout réel t , $(1 - \cos t)(1 + \cos t) = 1^2 - (\cos t)^2 = \boxed{(\sin t)^2}$

2) Pour tout nombre réel x , $\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x)^2 - (\sin^2 x)^2 = (\cos^2 x - \sin^2 x) \underbrace{(\cos^2 x + \sin^2 x)}_1 = \boxed{\cos^2 x - \sin^2 x}$

Puisque $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x$, on poursuit :

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = \cos^2 x - 1 + \cos^2 x = \boxed{2\cos^2 x - 1}$$

Exercice n°17

1) Pour tout réel x , $\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

Dans l'exercice précédent, on a établi que $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = \cos^2 x - 1 + \cos^2 x = \boxed{2\cos^2 x - 1}$

D'où l'égalité demandée

2) En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, et en appliquant la formule $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$, il vient :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}}$$

Exercice n°18

Les équations trigonométriques, qui possèdent en général une infinité de solutions (sauf si on restreint l'intervalle de définition), se résolvent presque exclusivement en utilisant les équivalences suivantes :

$$\cos a = \cos b \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ a = -b + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{et} \quad \sin a = \sin b \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ a = \pi - b + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases},$$

ainsi qu'à partir de certaines formules de trigonométrie

$\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	<p>Puisque $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, on a donc</p> $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$
$\sin(3x) = \frac{1}{2}$	<p>Puisque $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, on a donc $\sin(3x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(3x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$</p> $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ 3x = \pi - \left(\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ <p>Ne surtout pas oublier de diviser également $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ par 3 !</p>
$\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$	$\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + \frac{\pi}{4} = x + \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ 3x + \frac{\pi}{4} = -\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ 4x = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ 4x = -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{24} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = -\frac{7\pi}{48} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$
$\cos(2x) = \sin(3x)$	<p>En utilisant la propriété $\cos\left(\frac{\pi}{2} - X\right) = \sin X$, l'équation devient équivalente à</p> $\cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} - 3x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 2x = -\frac{\pi}{2} + 3x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ -x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{2} - 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{2} + 2k'\pi, k' \in \mathbb{Z} \text{ (avec } k' = -k) \end{cases}$
$\cos(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$	<p>L'équation $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ayant pour solutions $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$,</p> <p>On en déduit que l'inéquation $\cos(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ a pour solutions : $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{\pi}{4} + 2k\pi \right]$</p>

$\sin(3x) > \frac{1}{2}$	<p>L'équation $\sin(3x) = \frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ ayant pour solutions :</p> $\begin{cases} 3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou } 3x = \pi - \left(\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ <p>$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou } x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ (Ne surtout pas oublier de diviser également $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ par 3 !),</p> <p>on en déduit que l'inéquation $\sin(3x) > \frac{1}{2}$ a pour solutions : $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}; \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \right]$</p>
--------------------------	--

Exercice n°19

1) Puisque $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ et $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$, en additionnant les deux

lignes, on obtient $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$, c'est-à-dire $\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$

2) Si on pose $p = a+b$ et $q = a-b$, on aura, par demi-somme et demi-différence, $a = \frac{p+q}{2}$ et $b = \frac{p-q}{2}$, de sorte

qu'en remplaçant dans l'écriture $\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$, on obtiendra

$\cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} = \frac{\cos p + \cos q}{2}$, c'est-à-dire l'égalité souhaitée $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

3) En appliquant la formule $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$ aux deux termes extrêmes du membre de gauche de

l'équation, on obtient $\cos x + \cos 3x = 2 \cos \frac{x+3x}{2} \cos \frac{x-3x}{2} = 2 \cos(2x) \cos(-x) = 2 \cos(2x) \cos(x)$

L'équation $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$ devient alors équivalente à

$$\cos(2x) + 2 \cos(2x) \cos(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) [1 + 2 \cos(x)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x) = 0 \quad \text{ou} \quad 1 + 2 \cos(x) = 0$$

La première équation $\cos(2x) = 0$ est équivalente à $2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

La deuxième équation $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ est équivalente à $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

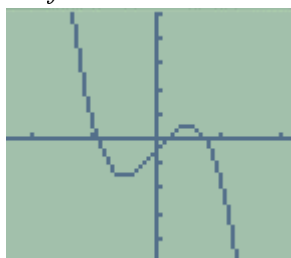
Trigonométrie et fonctions**Exercice n°20**

1) f est définie et dérivable sur \mathbb{R} en tant que fonction polynôme et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -12x^2 + 3 = 3(1 - 4x^2) = 3(1 - 2x)(1 + 2x)$$

On en déduit le signe de $f'(x)$ et le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	$-1/2$	$1/2$	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$+\infty$	\swarrow	\nearrow	\searrow	$-\infty$
		$-1,5$	$0,5$		



(pour les limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -4x^3 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -4x^3 = +\infty$)

$$2) \text{ L'équation } \sin 3a = \frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \text{ est équivalente à } \begin{cases} 3a = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ 3a = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi, l \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ a = \frac{5\pi}{18} + \frac{2l\pi}{3}, l \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Les solutions appartenant à l'intervalle $[0; 2\pi]$ sont obtenues pour $k = 0, 1, 2$ et $l = 0, 1, 2$. Leurs valeurs rangées dans l'ordre croissant sont $\left\{ \frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{17\pi}{18}, \frac{25\pi}{18}, \frac{29\pi}{18} \right\}$

$$3) \text{ Pour tout nombre réel } a, \sin 3a = \sin(a + 2a) = \sin(a)\cos(2a) + \sin(2a)\cos(a)$$

Puisque par ailleurs $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$ et puisque $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$, on obtient :

$$\begin{aligned} \sin 3a &= \sin(a)(1 - 2\sin^2 a) + 2\sin(a)\cos(a)\cos(a) = \\ &= \sin(a) - 2\sin^3 a + 2\sin(a)(\cos a)^2 = \sin(a) - 2\sin^3 a + 2\sin(a)(1 - \sin^2 a) \\ &= \sin(a) - 2\sin^3 a + 2\sin(a) - 2\sin^3 a = \boxed{-4\sin^3 a + 3\sin(a)} \end{aligned}$$

$$4) \text{ L'équation } f(x) = 0 \text{ s'écrivant } -4x^3 + 3x - \frac{1}{2} = 0, \text{ on pose } x = \sin(a), \text{ et l'équation devient } -4(\sin a)^3 + 3\sin a = \frac{1}{2}, \text{ c'est-à-dire, compte tenu de la question 3), } \sin 3a = \frac{1}{2}$$

$$\text{Or la question 2) nous fournit les valeurs de } a \text{ solutions : } a \in \left\{ \frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{17\pi}{18}, \frac{25\pi}{18}, \frac{29\pi}{18} \right\}$$

Puisque $x = \sin(a)$, il reste à « extraire » les trois valeurs différentes de sinus. En effet, les réels $\frac{\pi}{18}$ et $\frac{17\pi}{18}$ ont même sinus, puisque $\frac{17\pi}{18} = \pi - \frac{\pi}{18}$, et puisque pour tout α , $\sin(\alpha) = \sin(\pi - \alpha)$. De même, les réels $\frac{5\pi}{18}$ et $\frac{13\pi}{18}$ ont même sinus, ainsi que les réels $\frac{25\pi}{18}$ et $\frac{29\pi}{18}$. Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont donc

$$x \in \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{18}\right); \sin\left(\frac{5\pi}{18}\right); \sin\left(\frac{25\pi}{18}\right) \right\}$$

La calculatrice fournit $x \approx 0,17$, $x \approx 0,77$ et $x \approx -0,94$ à 0,01 près

Fonctions trigonométriques

Exercice n°21

$$1) \text{ On calcule } f(0) = \sin(2 \times 0) = \sin(0) = 0, f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2 \times \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(2 \times \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2 \times \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\pi) = -1, f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, f(\pi) = \sin(2 \times \pi) = \sin(2\pi) = 0$$

$$2) \mathbb{R} \text{ est symétrique par rapport à } 0, \text{ et pour tout } x \in \mathbb{R}, f(-x) = \sin(2(-x)) = \underbrace{\sin(-2x)}_{\text{car la fonction sinus est impaire}} = -\sin(2x) = -f(x), \text{ ce}$$

qui prouve que f est impaire. Sa courbe représentative est donc symétrique par rapport à l'origine O du repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

$$3) \text{ Pour tout } x \text{ réel, on calcule } f(x + \pi) = \sin(2(x + \pi)) = \underbrace{\sin(2x + 2\pi)}_{\text{car la fonction sinus est périodique de période } 2\pi} = \sin(2x) = f(x). f \text{ est donc périodique de}$$

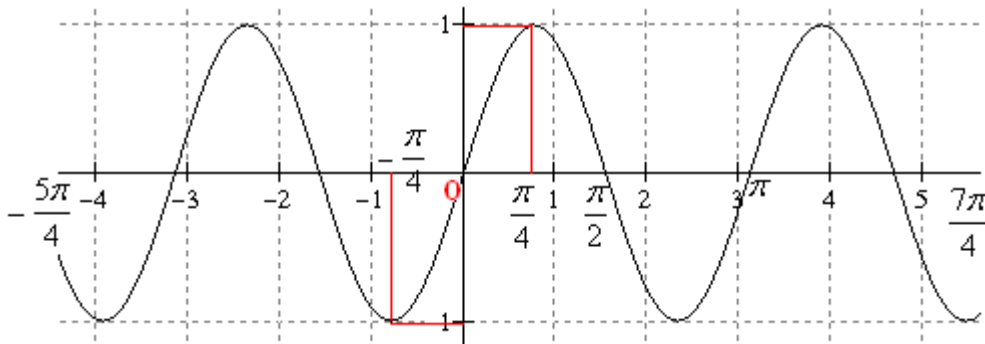
période π . Il suffit de l'étudier sur un intervalle d'amplitude π , par exemple $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$

$$4) \text{ Pour tout nombres réels } a \text{ et } b \text{ de l'intervalle } \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right] \text{ avec } -\frac{\pi}{4} \leq a < b \leq \frac{\pi}{4}, \text{ on a } -\frac{\pi}{2} \leq 2a < 2b \leq \frac{\pi}{2}, \text{ et puisque}$$

la fonction sinus est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, on aboutira à $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \leq \sin(2a) < \sin(2b) \leq \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$, c'est-à-dire à $-1 \leq f(a) < f(b) \leq 1$. La fonction f est donc strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$

Pour tout nombres réels a et b de l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ avec $\frac{\pi}{4} \leq a < b \leq \frac{3\pi}{4}$, on a $\frac{\pi}{2} \leq 2a < 2b \leq \frac{3\pi}{2}$, et puisque la fonction sinus est strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, on aboutira à $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \geq \sin(2a) > \sin(2b) \geq \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, c'est-à-dire à $1 \geq f(a) > f(b) \geq -1$. La fonction f est donc strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

5) Représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $\left[-\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$:



Exercice n°22

1) Pour tout x réel $-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow x-1 \leq x + \sin x \leq x+1 \Leftrightarrow x-1 \leq f(x) \leq x+1$

2) Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} x-1 = +\infty$, on conclut, en utilisant le théorème de minoration,

que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} x+1 = -\infty$, on conclut, en utilisant

le théorème de minoration, que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Exercice n°23

1) Puisque pour tout réel x , on a $-1 \leq \cos x \leq 1$, alors pour tout $x > 0$, on a $1-1 \leq 1 + \cos x \leq 1+1 \Leftrightarrow 0 \leq 1 + \cos x \leq 2$, et par division par \sqrt{x} qui est > 0 , on déduit que $\frac{0}{\sqrt{x}} \leq \frac{1 + \cos x}{\sqrt{x}} \leq \frac{2}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1 + \cos x}{\sqrt{x}} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$.

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$, en application du théorème d'encadrement « des gendarmes », on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

2) Commençons par la limite lorsque $x \rightarrow +\infty$. On peut donc supposer que $x > 0$.

Puisque pour tout réel x , on a $-1 \leq \sin x \leq 1$, alors pour tout $x > 0$, on a $\frac{-x}{x^2+1} \leq \frac{x \sin x}{x^2+1} \leq \frac{x}{x^2+1}$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = 0$, et puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, en application du théorème d'encadrement dit « des gendarmes », on conclut que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

La limite lorsque $x \rightarrow -\infty$ se traite à l'identique : on peut donc supposer que $x < 0$.

Puisque pour tout réel x , on a $-1 \leq \sin x \leq 1$, alors pour tout $x < 0$, on a $\frac{x}{x^2+1} \leq \frac{x \sin x}{x^2+1} \leq \frac{-x}{x^2+1}$ (l'inégalité est en sens inverse de la précédente)

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = 0$, et puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, en application du théorème d'encadrement dit « des gendarmes », on conclut que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

Exercice n°24

1) On a clairement $A_1 < A_2 < A_3$. On calcule : $A_1 = \frac{OA \times PM}{2} = \frac{1 \times \sin x}{2}$, puis par proportionnalité de l'aire et de la mesure du secteur angulaire, $A_2 = \frac{x}{2}$ (car un angle de 2π rad correspond à une aire de $\pi r^2 = \pi \text{ cm}^2$, donc un angle de x rad

correspond à une aire de $x \times \frac{\pi}{2\pi} = \frac{x}{2}$). Enfin $A_3 = \frac{OA \times AT}{2} = \frac{1 \times \tan x}{2} = \frac{\tan x}{2}$

Puisque $A_1 < A_2 < A_3$ alors $\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2}$.

En multipliant les trois membres de l'inégalité par 2, on obtient le résultat attendu.

2) En utilisant les deux premiers termes de l'inégalité, on a $\sin x < x \Leftrightarrow \frac{\sin x}{x} < 1$ (car $x > 0$)

En utilisant les deux derniers termes de l'inégalité, on a $x < \tan x \Leftrightarrow x < \frac{\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x}$ (car $x > 0$)

3) Puisque pour tout $x > 0$, $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$, et puisque $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$, on en conclut en application du théorème d'encadrement dit « des gendarmes », que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sin x}{x} = 1$

4) si $x < 0$, la configuration des triangles et des secteurs angulaires reste la même, mais les mesures de l'aire (qui doivent être positives !) sont alors égales à $A_1 = -\frac{\sin x}{2}$, $A_2 = -\frac{x}{2}$ et $A_3 = -\frac{\tan x}{2}$

On a donc, pour $x < 0$, $-\frac{\sin x}{2} < -\frac{x}{2} < -\frac{\tan x}{2} \Leftrightarrow -\sin x < -x < -\tan x$.

En utilisant les deux premiers termes de l'inégalité, on a $-\sin x < -x \Leftrightarrow \frac{-\sin x}{-x} < 1 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{x} < 1$ (car $-x > 0$)

En utilisant les deux derniers termes de l'inégalité :

on a $-x < -\tan x \Leftrightarrow -x < \frac{-\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow \cos x < \frac{-\sin x}{-x} \Leftrightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x}$ (car $-x > 0$). La conclusion de l'exercice reste la même

Exercice n°25

1) On écrit, pour tout $x > 0$, $\frac{\sin 5x}{2x} = \frac{\sin 5x}{\cancel{5x}} \frac{\cancel{5x}}{2x} = \frac{5}{2} \times \frac{\sin 5x}{5x}$. En posant $u = 5x$, on a $\lim_{x \rightarrow 0} u = 0$, et puisque $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$,

on en déduit donc que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1$, donc par produit $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{2x} = \frac{5}{2}$

2) On écrit, pour tout $x > 0$, $\frac{x}{\sin 3x} = \frac{1}{3} \frac{3x}{\sin 3x}$. Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, on a aussi $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$, donc en particulier

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin 3x} = 1$ (quitte à poser $u = 3x$), d'où, par produit, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 3x} = \frac{1}{3}$

3) On écrit, pour tout $x > 0$, $\frac{\sin 5x}{\sin 4x} = \frac{\sin 5x}{5x} \times \frac{4x}{\sin 4x} \times \frac{5x}{4x} = \frac{5}{4} \times \frac{\sin 5x}{5x} \times \frac{4x}{\sin 4x}$. Encore une fois, puisque $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1$ et

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sin 4x} = 1$, on conclut, par produit, que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 4x} = \frac{5}{4}$

4) On écrit, pour tout $x > 0$, $\frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{x \cos x} = \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{\cos x}$. Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et puisque $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ donc

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$, on conclut que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \times 1 = 1$

Exercice n°26

1) $f(x) = x \cos x - 2 \sin x$. f est définie et dérivable sur \mathbb{R} en tant que somme et produits de fonctions qui le sont.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = \underbrace{1 \times \cos x + x \times (-\sin x)}_{\text{dérivée d'un produit}} - 2 \times \cos x = \cos x - x \sin x - 2 \cos x$ donc $f'(x) = -\cos x - x \sin x$

2) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. f est définie et dérivable sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, et dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

Pour tout $x \in]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ $f'(x) = \frac{(\cos x) \times x - (\sin x) \times 1}{x^2} = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$ donc $f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$

3) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, et dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$

Pour tout $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$,

$$f'(x) = \frac{(\cos x) \times (\cos x) - (\sin x) \times (-\sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{(\cos x)^2} = \begin{cases} \frac{1}{(\cos x)^2} \\ 1 + \frac{(\sin x)^2}{(\cos x)^2} = 1 + (\tan x)^2 \end{cases}$$

4) $f(x) = \cos(3x) - \sin(2x)$. f est définie et dérivable sur \mathbb{R} en tant que somme et produits de fonctions qui le sont.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = 3 \times (-\sin(3x)) - 2 \times (\cos(2x)) = -3 \sin(3x) - 2 \cos(2x)$ donc $f'(x) = -3 \sin(3x) - 2 \cos(2x)$

Exercice n°27

Sur $I = \mathbb{R}$, on calcule $f'(x) = -3 \sin 3x$, puis $f^{(2)}(x) = -3^2 \cos 3x$, puis $f^{(3)}(x) = 3^3 \sin 3x$ et enfin $f^{(4)}(x) = 3^4 \cos 3x$, ce qui nous permet de conclure, de manière « cyclique » que :

Si $n = 4m$, $f^{(n)}(x) = 3^n \cos 3x$ Si $n = 4m + 1$, $f^{(n)}(x) = -3^n \sin 3x$

Si $n = 4m + 2$, $f^{(n)}(x) = -3^n \cos 3x$ Si $n = 4m + 3$, $f^{(n)}(x) = 3^n \sin 3x$

Exercice n°28

1) Si on pose $f(x) = \sin x$, définie sur \mathbb{R} , puisque $f(0) = \sin 0 = 0$, la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ se réécrit $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$. Or f

est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \cos x$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = \cos 0 = 1$. Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

2) Si on pose $f(x) = \cos x$, définie sur \mathbb{R} , puisque $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, la limite $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$ se réécrit

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}}$. Or f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\sin x$ donc

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1. \text{ Ainsi } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = -1.$$

Exercice n°29

1) La fonction f définie par $f(x) = \sin x - 2 \cos x$ est continue sur \mathbb{R} en tant que somme de fonctions qui le sont, donc il existe une primitive définie sur \mathbb{R} par $F(x) = -\cos x - 2 \sin x$

2) $f(x) = \sin x \cos x$. f est définie et continue sur \mathbb{R} en tant que produit de fonctions qui le sont, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x \sin x$, donc de la forme $f(x) = u'(x)u(x)$, où $u(x) = \sin x \Rightarrow u'(x) = \cos x$. Ainsi une primitive sur \mathbb{R}

de f est définie par $F(x) = \frac{(u(x))^2}{2} = \frac{(\sin x)^2}{2}$

3) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$ f est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, et pour x appartenant à l'un des intervalles $]k\pi; (k+1)\pi[$, f étant de la forme

$f(x) = \frac{u'(x)}{(u(x))^2}$, où $u(x) = \sin x \Rightarrow u'(x) = \cos x$, elle admet une primitive sur chaque intervalle $]k\pi; (k+1)\pi[$

définie par $F(x) = -\frac{1}{u(x)} = -\frac{1}{\sin x}$

4) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$ f est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le

dénominateur ne s'annulant pas, et pour x appartenant à l'un des intervalles $]k\frac{\pi}{2}; (k+1)\frac{\pi}{2}[$, f étant de la forme

$f(x) = \frac{-u'(x)}{(u(x))^2}$, où $u(x) = \cos x \Rightarrow u'(x) = \sin x$, elle admet une primitive sur chaque intervalle $]k\frac{\pi}{2}; (k+1)\frac{\pi}{2}[$

définie par $F(x) = \frac{1}{u(x)} = \frac{1}{\cos x}$

5) $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{2 + \sin x}}$ f est définie et continue sur \mathbb{R} en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne

s'annulant pas, et pour $x \in \mathbb{R}$, f étant de la forme $f(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$, où $u(x) = 2 + \sin x \Rightarrow u'(x) = \cos x$, elle admet une

primitive sur \mathbb{R} définie par $F(x) = 2\sqrt{u(x)} = 2\sqrt{2 + \sin x}$

6) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$. f est définie et continue sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne

s'annulant pas, donc admet des primitives sur $]0; \frac{\pi}{2}[$, et pour tout $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$, puisque $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{u'(x)}{u(x)}$, ou

$u(x) = \sin x \Rightarrow u'(x) = \cos x$, $F(x) = \ln(|u(x)|) = \ln(|\sin x|) = \ln(\sin x)$, puisque $x \in]0; \frac{\pi}{2}[\Rightarrow \sin x > 0$.

7) $f(x) = \tan x$. f définie est continue sur $]\frac{\pi}{2}; \pi[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne

s'annulant pas, donc admet des primitives sur $]\frac{\pi}{2}; \pi[$, et pour tout $x \in]\frac{\pi}{2}; \pi[$, puisque $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-u'(x)}{u(x)}$, ou

$u(x) = \cos x \Rightarrow u'(x) = -\sin x$, $F(x) = -\ln(|u(x)|) = -\ln(|\cos x|) = -\ln(-\cos x)$, puisque $x \in]\frac{\pi}{2}; \pi[\Rightarrow \cos x < 0$.

Exercice n°30

1) On calcule $\int_0^\pi \sin x \cos x dx = \int_0^\pi \cos x \sin x dx = \int_0^\pi u'(x)u(x) dx$ où $u(x) = \sin x$. Ainsi

$$\int_0^\pi \sin x \cos x dx = \left[\frac{u^2(x)}{2} \right]_0^\pi = \frac{1}{2} \left((\sin \pi)^2 - (\sin 0)^2 \right) = \frac{1}{2} (0 - 0) = 0. \quad \boxed{\text{L'affirmation est donc VRAIE}}$$

2) On calcule $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \int_1^e \frac{1}{x} \times (\ln x)^2 dx = \int_1^e u'(x) \times u^2(x) dx$ où $u(x) = \ln x$. L'affirmation est donc VRAIE

$$\text{Ainsi } \int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \left[\frac{(u(x))^3}{3} \right]_1^e = \left[\frac{(\ln(x))^3}{3} \right]_1^e = \frac{(\ln(e))^3}{3} - \frac{(\ln(1))^3}{3} = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

3) On peut déjà écrire que $\int_0^{-\pi} \sin^4 x dx = -\int_{-\pi}^0 \sin^4 x dx$. Comme la fonction $x \rightarrow \sin^4 x$ est PAIRE sur $[-\pi; \pi]$, (puisque $(\sin(-x))^4 = (-\sin(x))^4 = (\sin(x))^4$), on a donc $\int_{-\pi}^0 \sin^4 x dx = \int_0^\pi \sin^4 x dx$. L'égalité est donc FAUSSE

Exercice n°31

Pour tout $x \in [0, 1]$, $\sin x \geq 0$ et $x^2 \leq x$, donc $x^2 \sin x \leq x \sin x$

On « passe aux intégrales » dans l'inégalité. Ainsi $\int_0^1 x^2 \sin x dx \leq \int_0^1 x \sin x dx$

Exercice n°32 1) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x)v'(x) dx$ où $u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$ et $v'(x) = \sin x \Rightarrow v(x) = -\cos x$ sont continûment dérivables. D'après la formule d'intégration par parties (**IPP en abrégé**)

$$I = \left[u(x)v(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x)v(x) dx = \left[-x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \times (-\cos x) dx = 0 + 0 + \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{1}$$

2) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x)v'(x) dx$ où $u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x$ et $v'(x) = \sin x \Rightarrow v(x) = -\cos x$ sont continûment dérivables. D'après la formule d'**IPP**,

$$I = \left[u(x)v(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x)v(x) dx = \left[x^2 \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \times (-\cos x) dx = 0 - 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \cos x dx$$

On calcule l'intégrale $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \cos x dx$ en effectuant une 2^{ème} **IPP** : $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x)v'(x) dx$ où $u(x) = 2x \Rightarrow u'(x) = 2$ et $v'(x) = \cos x \Rightarrow v(x) = \sin x$ sont continûment dérivables. D'après la formule d' **IPP**,

$$J = \left[u(x)v(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x)v(x) dx = \left[2x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \times \sin x dx = \pi - 0 - 2 \left[-\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 2. \quad \text{Finalement, } \boxed{I = \pi - 2}$$

3) $I = \int_0^\pi e^x \sin x dx = \int_0^\pi u(x)v'(x) dx$ où $u(x) = e^x \Rightarrow u'(x) = e^x$ et $v'(x) = \sin x \Rightarrow v(x) = -\cos x$ sont continûment

dérivables. D'après la formule d' **IPP**, $I = \left[u(x)v(x) \right]_0^\pi - \int_0^\pi u'(x)v(x) dx = \left[-e^x \cos x \right]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \times (-\cos x) dx$

$= e^\pi + 1 + \int_0^\pi e^x \cos x dx$. On calcule $J = \int_0^\pi e^x \cos x dx$ en effectuant une 2^{ème} IPP : $J = \int_0^\pi e^x \cos x dx = \int_0^\pi u(x)v'(x) dx$ où $u(x) = e^x \Rightarrow u'(x) = e^x$ et $v'(x) = \cos x \Rightarrow v(x) = \sin x$ sont continûment dérivables. D'après la formule d'IPP, $J = [u(x)v(x)]_0^\pi - \int_0^\pi u'(x)v(x) dx = [e^x \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \sin x dx = 0 - 0 - I$

On aboutit donc à l'équation $I = e^\pi + 1 - I$ c'est-à-dire $2I = e^\pi + 1$ et on conclut ainsi que $I = \frac{e^\pi + 1}{2}$

4) $I = \int_0^\pi e^{2x} \cos x dx = \int_0^\pi u(x)v'(x) dx$ où $u(x) = e^{2x} \Rightarrow u'(x) = 2e^{2x}$ et $v'(x) = \cos x \Rightarrow v(x) = \sin x$ sont

continûment dérivables. D'après la formule d'IPP, $I = [u(x)v(x)]_0^\pi - \int_0^\pi u'(x)v(x) dx = [e^{2x} \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi 2e^{2x} \sin x dx$

$= 0 - 0 - \int_0^\pi 2e^{2x} \sin x dx$. On calcule $J = \int_0^\pi 2e^{2x} \sin x dx$ en effectuant une 2^{ème} IPP : $J = \int_0^\pi 2e^{2x} \sin x dx = \int_0^\pi u(x)v'(x) dx$

où $u(x) = 2e^{2x} \Rightarrow u'(x) = 4e^{2x}$ et $v'(x) = \sin x \Rightarrow v(x) = -\cos x$ sont continûment dérivables.

D'après la formule d'IPP,

$J = [u(x)v(x)]_0^\pi - \int_0^\pi u'(x)v(x) dx = [-2e^{2x} \cos x]_0^\pi - \int_0^\pi 4e^{2x} (-\cos x) dx = 2e^{2\pi} + 2 + 4 \int_0^\pi e^{2x} \cos x dx = 2e^{2\pi} + 2 + 4I$

On aboutit donc à l'équation $I = -2e^{2\pi} - 2 - 4I$ c'est-à-dire $5I = -2e^{2\pi} - 2$ et on conclut ainsi que $I = -\frac{2}{5}(e^{2\pi} + 1)$