# ملخصي وقواعدي في الرياضيات لمستوى جذع مشترك علوم

من انجاز : الأستاذ نجيب عثماني أستاذ مادة الرياضيات في الثانوي تأهيلي

## ملخص درس الجذاء السلمي

**I.تعاريف:تعريف 1: الجداء السلمي لمتجهتين:**

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من المستوى بحيث: $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ و $H$ المسقط العمودي للنقطة $C$ على المستقيم $(AB)$.

الجداء السلمي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي الذي يرمز له بالرمز $\vec{u}\cdot\vec{v}$ و المعروف بما يلي:

- إذا كانت $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AH}$ لهما نفس المنحى فان: $\vec{u}\cdot\vec{v}=AB\times AH$
- إذا كانت $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AH}$ لهما منحيان متعاكسان فان: $\vec{u}\cdot\vec{v}=-AB\times AH$
- و نكتب $\vec{u}\cdot\vec{v}=AB\cdot AH$ أو $\vec{u}\cdot\vec{v}=AB\cdot AC$

**تعريف 2: الصيغة المثلثية للجداء السلمي:**

إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين و $\alpha$ هو قياس الزاوية $\widehat{BAC}$ حيث $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ فان:

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\alpha$ **نتيجة:** $\cos\alpha=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$

**II. خاصيات الجداء السلمي:**

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث متجهات:

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
- $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
- $\vec{u}\cdot(k\vec{v})=k\vec{u}\cdot\vec{v}$ مهما يكن $k$ من $\mathbb{R}$.

**المتطابقات الهامة:**

$$(\vec{u}+\vec{v})^2=\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$$

$$(\vec{u}-\vec{v})^2=\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$$

$$(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$$

**ملاحظة:** $\vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$ نرمز ل $\vec{u}\cdot\vec{u}$ ب $\vec{u}^2$: و يسمى المربع السلمي,

و منه $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$ اذن $\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}^2}$

و اذا كانت $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ فان $AB=\sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$

**خاصية:** تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدتين إذا و فقط إذا كان $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ و نكتب $\vec{u}\perp\vec{v}$

**نتيجة:** $(AB)\perp(CD)$ إذا و فقط إذا كان $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ .

**III.علاقات مترية في مثلث قائم الزاوية:**

**خاصية:** ليكن $ABC$ مثلثا و $H$ المسقط العمودي للنقطة $A$ على $(BC)$ .

إذا كان $ABC$ قائما في $A$ فان:

1) $AB^2+AC^2=BC^2$ (مبرهنة فيتاغورس)

2) $AC\times AB=AH\times BC$

3) $BA^2=BH\times BC$ أو $CA^2=CH\times BC$

4) $AH^2=HB\times HC$

**IV.مبرهنة الكاشي:**

**خاصية:** ليكن $ABC$ مثلثا لدينا:

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\times\cos\left(\widehat{BAC}\right)$$

**نتائج:** 1) $\cos\left(\widehat{BAC}\right)=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\times AC}$

2) $BC^2=AB^2+AC^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ ومنه $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$

3) هناك علاقتين مماثلتين للعلاقة الأولى:

$$AB^2=CA^2+CB^2-2CA\times CB\times\cos\left(\widehat{ACB}\right)$$

$$AC^2=BA^2+BC^2-2AB\times BC\times\cos\left(\widehat{ABC}\right)$$

**مثال:** ليكن $ABC$ مثلثا بحيث: $\widehat{BAC}=\dfrac{2\pi}{3}$ و $AC=8$ و $AB=5$ أحسب $BC$

**الجواب:** حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث $ABC$

لدينا: $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos\widehat{BAC}$

يعني : $BC^2=5^2+8^2-2\times8\times5\cos\widehat{BAC}$

يعني : $BC^2=89-80\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ يعني : $BC^2=89-80\cos\left(\dfrac{3\pi-\pi}{3}\right)$

يعني : $BC^2=89-80\cos\left(\dfrac{3\pi}{3}-\dfrac{\pi}{3}\right)$ يعني : $BC^2=89-80\cos\left(\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)$

يعني : $BC^2=89-80\left(-\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$ لأن : $\cos(\pi-x)=-\cos x$

يعني : $BC^2=89+80\left(\dfrac{1}{2}\right)$ يعني : $BC^2=89+40$ يعني : $BC^2=129$

يعني : $BC=\sqrt{129}$

**V. مبرهنة المتوسط:**

**خاصية:** ليكن $ABC$ مثلثا و $I$ منتصف القطعة $[BC]$

لدينا: $AB^2+AC^2=2AI^2+\dfrac{BC^2}{2}$

**مثال:** ليكن $ABM$ مثلثا بحيث: $AB=4cm$ و $AM=3cm$ و $BM=4cm$

و لتكن $I$ منتصف $[AB]$ و $J$ منتصف $[AM]$ و $K$ منتصف $[BM]$

أحسب المسافات $MI$ و $BJ$

**الجواب:** حساب $MI$: حسب مبرهنة المتوسط على المثلث $ABM$ لدينا:

$MA^2+MB^2=2MI^2+\dfrac{1}{2}AB^2$ يعني : $3^2+4^2=2MI^2+\dfrac{1}{2}4^2$

يعني : $9+16=2MI^2+\dfrac{16}{2}$ يعني : $25-8=2MI^2$ يعني : $17=2MI^2$

يعني : $MI^2=\dfrac{17}{2}$ يعني : $MI=\sqrt{\dfrac{17}{2}}$

حساب $BJ$: حسب مبرهنة المتوسط على المثلث $ABM$ لدينا:

$AB^2+BM^2=2BJ^2+\dfrac{1}{2}AM^2$ يعني : $4^2+4^2=2BJ^2+\dfrac{1}{2}3^2$

يعني : $32-\dfrac{9}{2}=2BJ^2$ يعني : $\dfrac{55}{2}=2BJ^2$

يعني : $BJ^2=\dfrac{55}{4}$ يعني : $BJ=\sqrt{\dfrac{55}{4}}$ يعني : $BJ=\dfrac{\sqrt{55}}{2}$