تصحيح الفرض المنزلي رقم 5

تمرين1: 5pts (ن1+ن1+ن1+ن1+ ن1)

حدد الدالة المشتقة للدالة f في الحالات التالية :

1) $f(x)=\frac{1}{x+7}$ 2) $f(x)=\sqrt{6x^2+8x+1}$ 3) $f(x)=\frac{2x}{x^3+2}$

4) $f(x)=(3x+7)^3$ 5) $f(x)=x\sin x$

الجواب: 1) نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{x+7}\right)'=-\frac{(x+7)'}{(x+7)^2}=-\frac{1}{(x+7)^2}$$

2) $f(x)=\sqrt{6x^2+8x+1}$ نستعمل القاعدة التالية : $(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$$f'(x)=\left(\sqrt{6x^2+8x+1}\right)'=\frac{(6x^2+8x+1)'}{2\sqrt{6x^2+8x+1}}=\frac{12x+8}{2\sqrt{6x^2+8x+1}}=\frac{6x+4}{\sqrt{6x^2+8x+1}}$$

3) $f(x)=\frac{2x}{x^3+2}$ نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{2x}{x^3+2}\right)'=\frac{(2x)'(x^3+2)-2x(x^3+2)'}{(x^3+2)^2}=\frac{2(x^3+2)-2x\times3x^2}{(x^3+2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x^3+4-6x^3}{(x^3+2)^2}=\frac{4-4x^3}{(x^3+2)^2}$$

4) $f(x)=(3x+7)^3$ نستعمل القاعدة التالية : $(u^n)'=nu^{n-1}\times u'$

$$f'(x)=\left((3x+7)^3\right)'=3\times(3x+7)^{3-1}\times(3x+7)'=9(3x+7)^2$$

5) $f(x)=x\sin x$

نستعمل القاعدة التالية : $(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$

$$f'(x)=(x\times\sin x)'=(x)'\times(\sin x)+(x)\times(\sin x)'$$

$$f'(x)=(x\times\sin x)'=1\times\sin x+x\times\cos x=\sin x+x\times\cos x$$

تمرين2: 11 pts (ن1+ ن1+ ن2+ن1+ن2+ن2+ ن0.5+ ن1.5)

نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x)=x^3-3x^2+4$

ليكن (C_f) الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$

1. أحسب نهايات الدالة f عند محدات مجموعة التعريف
2. أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f
3. أحسب مشتقة الدالة f و أدرس إشارتها
4. ضع جدول تغيرات الدالة f .
5. أدرس تقعر المنحنى (C_f) الممثل للدالة f وحدد نقط الانعطاف
6. بين أن $A(1;-1)$ مركز تماثل للمنحنى (C_f)
7. حدد معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة $A(1;-1)$
8. أنشئ (C_f) و (T).

الجواب: 1) $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

لأن نهاية دالة حدودية عند $+\infty$ و $-\infty$ هي نهاية حدها الأكبر درجة

2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x}=\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$

(C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x}=\lim_{x\to-\infty}x^2=+\infty$

(C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار $-\infty$

3) $f'(x)=(x^3-3x^2+4)'=3\times x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x(x-2)=0 \Leftrightarrow 3x=0$ أو $x-2=0$

$\Leftrightarrow x=0$ أو $x=2$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$3x(x-2)$		+	0	−	0	+	

4)

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

5)

$$f'(x)=(x^3-3x^2+4)'=3\times x^2-6x$$

$$f''(x)=(3\times x^2-6x)'=6x-6$$

$$x=1 \Leftrightarrow 6x-6=0 \Leftrightarrow f''(x)=0$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$6x-6$		−	0	+	

- تقعر (C_f) موجه نحو محور الأراتيب الموجبة على المجال: $[1;+\infty[$
- تقعر (C_f) موجه نحو محور الأراتيب الموجبة على المجال: $]-\infty;1]$

يمكن تلخيص النتائج في جدول التقعر

المشتقة الثانية تنعدم وتتغير اشارتها عند : $x_0=1$ و لدينا $f(1)=2$

ومنه : $A(1;2)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f).

6) نبين أن $A(1;2)$ $A(a;b)$

أ) اذا كانت $x\in\mathbb{R}$ فان : $2-x\in\mathbb{R}$ عبارة صحيحة

ب) نبين أن : $f(2-x)+f(x)=4=2b$ ؟؟؟؟

$$f(2-x)+f(x)=(2-x)^3-3(2-x)^2+4+x^3-3x^2+4$$

$$f(2-x)+f(x)=2^3-3\times2^2x+3\times2x^2-x^3-3(2^2-4x+x^2)+4+x^3-3x^2+4$$

$$=8-12x+6x^2-x^3-12+12x-3x^2+4+x^3-3x^2+4=4=2b$$

ومنه $A(1;2)$ مركز تماثل منحنى الدالة f .

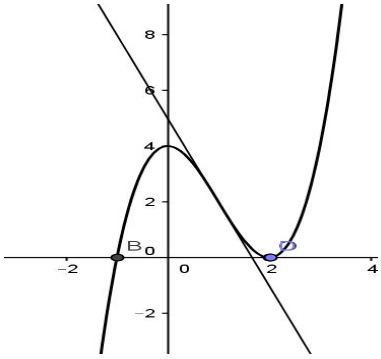
مركز تماثل للمنحنى (C_f)

7) معادلة لمماس ل (C_f) في النقطة A التي أفصولها $x_0=1$

$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ و $f(1)=2$ و $f'(1)=-3$

$$y=-3x+5 \Leftrightarrow y=2-3(x-1) \Leftrightarrow y=f(1)+f'(1)(x-1)$$

8) التمثيل المبياني للدالة f و $f(-1)=0$ و $f(2)=0$



تمرين3: 4pts (2ن +0.5ن +1.5ن)

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين كالتالي :

$$\begin{cases} f(x)=x^2+2x; x\le 1 \\ f(x)=-\frac{2}{x}+5; x>1 \end{cases} \quad \text{و} \quad g(x)=|x|(x-1)$$

1)أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين وعلى اليسار عند $x_0=1$

2)هل الدالة f قابلة للاشتقاق ؟

3)أدرس قابلية اشتقاق الدالة g عند $x_0=0$

الجواب: $\begin{cases} f(x)=x^2+2x; x\le 1 \\ f(x)=-\frac{2}{x}+5; x>1 \end{cases}$ و $f(1)=1^2+2\times 1=3$

1) $$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-\frac{4}{x}+5-3}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-\frac{4}{x}+2}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{-4+2x}{x}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{-4+2x}{x}\times\frac{1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-4+2x}{x}\times\frac{1}{x-1}=-\infty$$

ومنه f غير قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0=1$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+2x-3}{x-1}$$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلا بالتعميل ثم بالاختزال:

نلاحظ أن : 1 جذرللحدودية x^2+2x-3

اذن : هي تقبل القسمة على : $x-1$

وباستعمال تقنية القسمة الاقليدية نجد أن : $x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x+3)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}x+3=4$$

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0=1$ و $f'_g(1)=4$

2) f غير قابلة للاشتقاق على اليمين

ومنه : f غير قابلة للاشتقاق عند $x_0=1$

3) $g(x)=|x|(x-1)$ و $g(0)=0$ $\begin{cases} g(x)=x(x-1); x\ge 0 \\ g(x)=-x(x-1); x\le 0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(x-1)-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}x-1=-1$$

ومنه g قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0=0$ و $f'_d(0)=-1$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x(x-1)-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}-x+1=1$$

ومنه g قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0=0$ و $g'_g(0)=-1$

g قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار عند $x_0=0$ ولكن :

$g'_d(0)\neq g'_g(0)$

ومنه : g غير قابلة للاشتقاق عند $x_0=0$

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.
c'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien