تصحيح الفرض المحروس رقم A1

تمرين1: $3\text{ pts} = 6\times 0.5$

I. تحديد قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية :

1) $\left((-2)^2=4\right)$ و $\sqrt{5}\in\mathbb{N}$ خاطئة

2) $(\pi=4)$ أو $-1\in\mathbb{Z}$ صحيحة

3) $n\in\mathbb{N}\,(n\geq 5 \Rightarrow n\geq 4)$ صحيحة

4) $\exists! x\in IR;\ 4x^2-4x+1=0$ صحيحة

5) $(\forall n\in\mathbb{N});\frac{n}{4}\in\mathbb{N}$ خاطئة

II. كتابة العبارة التالية باستعمال المكممات:

" مهما يكن العدد الحقيقي الموجب قطعا x ، يوجد على الأقل عدد صحيح طبيعي n بحيث n أكبر قطعا من x" : P

$P;\ (\forall x>0);\ (\exists n\in\mathbb{N});n>x$

تمرين2: $2\text{ pts}=4\times0.5$

أوجد العبارات النافية للعبارات الآتية:

1) $(\sqrt{2}<1)$ أو $2\in\mathbb{N}$: A

2) كل تلاميذ هذا القسم يسكنون بعيدين عن المؤسسة : B

3) $C:(\exists x\in\mathbb{R});x>1\Rightarrow x^2\leq 2$

الجواب: 1) $(\sqrt{2}\geq1)$ و $2\notin\mathbb{N}$: $\overline{A}$

2) يوجد تلميذ في هذا القسم يسكن قريبا من المؤسسة : $\overline{B}$

3) $\overline{C}:(\forall x\in\mathbb{R});x>1$ و $x^2>2$

تمرين3: $4\text{ pts}=2\times2\text{ pts}$

1. بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن: $\forall n\in\mathbb{N}^*\ \ 5^n\geq 1+4n$
2. بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن: $\forall n\in\mathbb{N}$

$$3^0+3^1+3^2+3^3+\dots+3^n=\frac{3^{n+1}-1}{2}$$

الجواب: 1) نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

لدينا $5^1\geq 1+4\times1$ أي : $5\geq5$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

المرحلة2: نفترض أن: $5^n\geq 1+4n$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $5^{n+1}\geq 1+4(n+1)$ أي نبين أن : $5^{n+1}\geq 4n+5$ ؟؟

لدينا حسب افتراض الترجع :

$5^n\geq 1+4n$ اذن : $5^n\times5\geq 5\times(1+4n)$

يعني : $5^{n+1}\geq 20n+5$ اذن لم نجد بعد النتيجة

نلاحظ أن : $20n+5\geq 4n+5$ (يمكن حساب الفرق)

$(20n+5)-(4n+5)=16n\geq0$

لدينا اذن : $5^{n+1}\geq 20n+5$ و $20n+5\geq 4n+5$ ومنه :

$5^{n+1}\geq 4n+5$

2) نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $3^0=1$ و $\frac{3^{0+1}-1}{2}=1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

المرحلة2: نفترض أن: $3^0+3^1+3^2\dots+3^n=\frac{3^{n+1}-1}{2}$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $3^0+3^1+3^2\dots+3^n+3^{n+1}=\frac{3^{n+2}-1}{2}$ ؟؟

لدينا : $3^0+3^1+3^2+3^3+\dots+3^n+3^{n+1}=\left(3^0+3^1+3^2+3^3+\dots+3^n\right)+3^{n+1}$

ولدينا حسب افتراض الترجع : $3^0+3^1+3^2\dots+3^n=\frac{3^{n+1}-1}{2}$

اذن : $3^0+3^1+3^2\dots+3^n+3^{n+1}=\frac{3^{n+1}-1}{2}+3^{n+1}$

$$=\frac{3^{n+1}-1}{2}+3^{n+1}=\frac{3^{n+1}-1+2\times3^{n+1}}{2}=\frac{3\times3^{n+1}-1}{2}=\frac{3^{n+2}-1}{2}$$

ومنه : $3^0+3^1+3^2\dots+3^n+3^{n+1}=\frac{3^{n+2}-1}{2}$

والتالي : : $\forall n\in\mathbb{N}\ :3^0+3^1+3^2\dots+3^n=\frac{3^{n+1}-1}{2}$

تمرين4: 1.5 pts

بين باستعمال الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس أن :

$$(x\in\mathbb{R});x\neq1\Rightarrow \frac{4x-6}{x-2}\neq2$$

الجواب: الجواب :نستعمل الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس

اذن يكفي أن نبين أن : $\frac{4x-6}{x-2}=2\Rightarrow x=1$ ؟؟؟؟؟

لدينا: $\frac{4x-6}{x-2}=2\Rightarrow 4x-6=2(x-2)$

$4x-6=2(x-2)\Rightarrow 4x-6=2x-4\Rightarrow 2x=2\Rightarrow x=1$

ومنه : $\frac{4x-6}{x-2}=2\Rightarrow x=1$

وبالتالي : $(x\in\mathbb{R});x\neq1\Rightarrow\frac{4x-6}{x-2}\neq2$

تمرين5: 1.5 pts باستعمال الاستدلال بفصل الحالات :

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $(E):18-|x-2|=5x+2$

الجواب: الجواب :ندرس اشارة : $x-2$

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$x-2$	$-$ 0 $+$

الحالة 1: اذا كانت : $x\geq2$ فان : $x-2\geq0$ ومنه :

$|x-2|=x-2$

$(E)\Leftrightarrow 18-(x-2)=5x+2\Leftrightarrow 18-x+2=5x+2\Leftrightarrow -6x=-18$

$\Leftrightarrow x=3\in S$

الحالة 2: اذا كانت : $x\leq2$ فان : $(E)\Leftrightarrow 18+(x-2)=5x+2$

$\Leftrightarrow 18+x-2=5x+2\Leftrightarrow -4x=-14\Leftrightarrow x=\frac{7}{2}\notin S$ لأن :

$\frac{7}{2}>2$

ومنه مجموعة الحلول هي : $S=\{3\}$

تمرين6: $(4\,pts=2\times2pts)$

تحديد مجموعة تعريف : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}-3}$ و $g(x)=\sqrt{-x^2+2x+3}$

الجواب: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}-3}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\geq 0 et \sqrt{x}-3\neq 0\}$

$\sqrt{x}-3=0$ يعني $\sqrt{x}=3$ يعني $x=9$

ومنه : $D_g=[0;9[\cup]9;+\infty]$

(2 $g(x)=\sqrt{-x^2+2x+3}$ $D_g=\{x\in\mathbb{R}/-x^2+2x+3\geq 0\}$

$-x^2+2x+3=0$ نحل المعادلة باستعمال المميز

$a=-1$ و $b=2$ و $c=3$

$\Delta=b^2-4ac=4-4\times3\times(-1)=4+12=16=(4)^2>0$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{-2+\sqrt{16}}{2\times(-1)}=\frac{2}{-2}=-1$ و $x_2=\frac{-2-\sqrt{16}}{2\times(-1)}=\frac{-6}{-2}=3$

نحدد جدول الاشارة :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$-x^2+2x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

ومنه: $D_g=[-1,3]$

تمرين7: $(2.5\,pts)$

لتكن f دالة عددية معرفة ب : $f(x)=\frac{x^2+4x+1}{x^2+1}$

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f . **(0.5ن)**
2. بين أن f مصغورة بالعدد 1- لكل x من $\mathbb{R}$. **(2 ن)**

الجواب:(1

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+1\neq 0\}$

$x^2+1=0$ يعني $x^2=-1$ وهذا غير ممكن

ومنه المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$ ومنه: $D_f=\mathbb{R}$

(2 يكفي أن نبين أن : $\forall x\in\mathbb{R}$ $-1\leq f(x)$

اذن نحسب الفرق :

$$f(x)+1=\frac{x^2+4x+1}{x^2+1}+1=\frac{(x^2+4x+1)+(x^2+1)}{x^2+1}$$

$$f(x)+1=\frac{2x^2+4x+2}{x^2+1}=\frac{2(x^2+2x+1)}{x^2+1}=\frac{2(x+1)^2}{x^2+1}\geq 0$$

ومنه : $\forall x\in\mathbb{R}$ $f(x)+1\geq 0$

بالتالي f مصغورة بالعدد 1- على $\mathbb{R}$.

تمرين8: 2 pts $g(x)=3x^2-2x+3$ و $f(x)=x^2+1$

أدرس الوضع النسبي لمنحنى الدالة f و منحنى الدالة g

الجواب: $D_f=\mathbb{R}$ و $D_g=\mathbb{R}$ لأنهم دوال حدودية

$g(x)-f(x)=3x^2-2x+3-x^2-1=2x^2-2x+2$

$\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times2\times2=-12<0$

ومنه اشارتها هي اشارة $a=2$ أي أن : $2x^2-2x+2>0$

ومنه : $g(x)-f(x)\geq 0$ أي $g\geq f$ بالتالي منحنى الدالة g يوجد فوق منحنى الدالة f على $\mathbb{R}$.

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.
c'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien