تمرين1: $3\text{ pts}=6\times 0.5$

I. تحديد قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية :

1) $\left((-5)^2=25\right)$ و $\sqrt{4}\in\mathbb{N}$ صحيحة

2) $\sqrt{4}=2$ أو 2 عدد فردي صحيحة

3) $n\in\mathbb{N}\ (\ n\geq 3\Rightarrow n\geq 5$ خاطئة

4) $\exists! x\in IR;\ 4x^2-3x+1=0$ خاطئة

5) $(\exists n\in\mathbb{N});2n-1=0$ خاطئة

II. كتابة العبارة التالية باستعمال المكممات:

مهما يكن العدد الصحيح طبيعي n يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب قطعا x ، بحيث x أكبر قطعا من n :" P

$$P;\ (\forall n\in\mathbb{N});\ (\exists x>0);x>n$$

تمرين2: $2\text{ pts}=4\times 0.5$

أوجد العبارات النافية للعبارات الآتية:

1) $\left(\sqrt{3}\geq 2\right)$ و $A:\ -\sqrt{9}\in\mathbb{Z}$

2) توجد شجرة مثمرة في المؤسسة : B

3) $C:(\exists x\in\mathbb{R});x\leq 1\Rightarrow x^2>3$

الجواب: 1) $\left(\sqrt{3}<2\right)$ أو $\overline{A}:\ -\sqrt{9}\notin\mathbb{Z}$

2) كل الأشجار غير مثمرة في المؤسسة : $\overline{B}$

3) $\overline{C}:(\forall x\in\mathbb{R});x\leq 1$ و $x^2\leq 3$

تمرين3: $4\text{ pts}=2\times 2\text{ pts}$

1. بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن: $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad 4^n\geq 1+3n$
2. بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن: $\forall n\in\mathbb{N}$

$$5^0+5^1+5^2...+5^n=\frac{5^{n+1}-1}{4}$$

الجواب: 1) نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

لدينا $4^1\geq 1+3\times 1$ أي : $4\geq 4$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

المرحلة2: نفترض أن: $4^n\geq 1+3n$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $4^{n+1}\geq 1+3(n+1)$ أي نبين أن :

$4^{n+1}\geq 3n+4$ ؟؟

لدينا حسب افتراض الترجع :

$4^n\geq 1+3n$ اذن : $4^n\times 4\geq 4\times(1+3n)$

يعني : $4^{n+1}\geq 12n+4$ اذن لم نجد بعد النتيجة

نلاحظ أن : $12n+4\geq 3n+4$ (يمكن حساب الفرق)

$$(12n+4)-(3n+4)=9n\geq 0$$

لدينا اذن : $4^{n+1}\geq 12n+4$ و $12n+4\geq 3n+4$ ومنه :

$$4^{n+1}\geq 3n+4$$

2) نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $5^0=1$ و $\frac{5^{0+1}-1}{4}=1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

المرحلة2: نفترض أن: $5^0+5^1+5^2...+5^n=\frac{5^{n+1}-1}{4}$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $5^0+5^1+5^2...+5^n+5^{n+1}=\frac{5^{n+2}-1}{4}$ ؟؟؟؟؟

لدينا : $5^0+5^1+5^2+5^3+...+5^n+5^{n+1}=\left(5^0+5^1+5^2+5^3+...+5^n\right)+5^{n+1}$

ولدينا حسب افتراض الترجع : $5^0+5^1+5^2...+5^n=\frac{5^{n+1}-1}{4}$

اذن : $5^0+5^1+5^2...+5^n+5^{n+1}=\frac{5^{n+1}-1}{4}+5^{n+1}$

$$=\frac{5^{n+1}-1+4\times 5^{n+1}}{4}=\frac{5\times 5^{n+1}-1}{4}=\frac{5^{n+2}-1}{4}$$

ومنه : $5^0+5^1+5^2...+5^n+5^{n+1}=\frac{5^{n+2}-1}{4}$

وبالتالي : : $\forall n\in\mathbb{N}:5^0+5^1+5^2...+5^n=\frac{5^{n+1}-1}{4}$

تمرين4: 1.5 pts

بين باستعمال الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس أن :

$$(x\in\mathbb{R});x\neq -4\Rightarrow\frac{10x+5}{x-3}\neq 5$$

الجواب: الجواب :نستعمل الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس

اذن يكفي أن نبين أن : $\frac{10x+5}{x-3}=5\Rightarrow x=-4$ ؟؟؟؟؟

لدينا : $\frac{10x+5}{x-3}=5\Rightarrow 10x+5=5(x-3)$

$$10x+5=5(x-3)\Rightarrow 10x+5=5x-15\Rightarrow 5x=-20\Rightarrow x=-4$$

ومنه : $\frac{10x+5}{x-3}=5\Rightarrow x=-4$

وبالتالي : $(x\in\mathbb{R});x\neq -4\Rightarrow\frac{10x+5}{x-3}\neq 5$

تمرين5: 1.5 pts باستعمال الاستدلال بفصل الحالات :

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $(E):8-|x-3|=7x+3$

الجواب: الجواب :ندرس اشارة : $x-3$

x	$-\infty$ 3 $+\infty$
$x-3$	$-$ 0 $+$

الحالة 1: اذا كانت : $x\geq 3$ فان : $x-3\geq 0$ ومنه : $|x-3|=x-3$

$$(E)\Leftrightarrow 8-(x-3)=7x+3\Leftrightarrow 8-x+3=7x+3\Leftrightarrow -8x=-8$$

$\Leftrightarrow x=1\notin S$

الحالة 2: اذا كانت : $x\leq 3$ فان : $(E)\Leftrightarrow 8+(x-3)=7x+3$

$\Leftrightarrow 8+x-3=7x+3\Leftrightarrow -6x=-2\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}\in S$ لأن : $\frac{1}{3}<3$

ومنه مجموعة الحلول هي : $S=\left\{\frac{1}{3}\right\}$

تمرين6: $(4\text{ pts}=2\times 2\text{pts})$

تحديد مجموعة تعريف $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}-2}$ و $g(x)=\sqrt{-x^2-2x+3}$

الجواب: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}-2}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\geq 0 et \sqrt{x}-2\neq 0\}$

$\sqrt{x}-2=0$ يعني $\sqrt{x}=2$ يعني $x=4$

ومنه : $D_g=[0;4[\cup]4;+\infty[$

2) $g(x)=\sqrt{-x^2-2x+3}$ $D_g=\{x\in\mathbb{R}/-x^2-2x+3\geq 0\}$

$-x^2-2x+3=0$ نحل المعادلة باستعمال المميز

$a=-1$ و $b=-2$ و $c=3$

$$\Delta=b^2-4ac=4-4\times3\times(-1)=4+12=16=(4)^2>0$$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{2+\sqrt{16}}{2\times(-1)}=\frac{6}{-2}=-3$ و $x_2=\frac{2-\sqrt{16}}{2\times(-1)}=\frac{-2}{-2}=1$

نحدد جدول الاشارة :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$-x2-2x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

ومنه : $D_g=[-3,1]$

تمرين7: (2.5 pts)

لتكن f دالة عددية معرفة ب : $f(x)=\frac{2x^2+4x-3}{x^2+2}$

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f . **(0.5ن)**

2. بين أن f مصغورة بالعدد 2- لكل x من $\mathbb{R}$. **(2 ن)**

الجواب:1)

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+2\neq 0\}$

$x^2+2=0$ يعني $x^2=-2$ وهذا غير ممكن

ومنه المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$ ومنه: $D_f=\mathbb{R}$

2) يكفي أن نبين أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ -1\leq f(x)$

اذن نحسب الفرق :

$$f(x)+2=\frac{2x^2+4x-3}{x^2+2}+2=\frac{(2x^2+4x-3)+2(x^2+2)}{x^2+2}$$

$$f(x)+2=\frac{2x^2+4x-3+2x^2+4}{x^2+2}=\frac{4x^2+4x+1}{x^2+2}=\frac{(2x+1)^2}{x^2+2}\geq 0$$

ومنه : $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)+2\geq 0$

بالتالي f مصغورة بالعدد 2- على $\mathbb{R}$.

تمرين8: 2 pts $f(x)=2x^2+x+5$ و $g(x)=x^2-1$

أدرس الوضع النسبي لمنحنى الدالة f و منحنى الدالة g

الجواب: $D_f=\mathbb{R}$ و $D_g=\mathbb{R}$ لأنهم دوال حدودية

$$f(x)-g(x)=2x^2+x+5-x^2+1=x^2+x+6$$

$$\Delta=b^2-4ac=1^2-4\times1\times6=-23<0$$

ومنه اشارتها هي اشارة $a=1$ أي أن : $x^2+x+6>0$

ومنه : $f(x)-g(x)\geq 0$ أي $f\geq g$ بالتالي منحنى الدالة f يوجد فوق منحنى الدالة g على $\mathbb{R}$.

« c’est en forgeant que l’on devient forgeron » dit un proverbe.

c’est en s’entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l’on devient un mathématicien