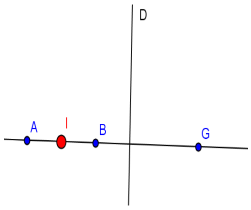
تصحيح الفرض المحروس رقم A2

تمرين1: (2ن+1ن)

لتكن I منتصف القطعة $[AB]$ و G مرجح النقطتين

1. بين أن : $2\overrightarrow{MA}-4\overrightarrow{MB}=-2\overrightarrow{MG}$ و أن : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$ مهما تكن النقطة M من المستوى
2. استنتج مجموعة النقط M من المستوى بحيث : $\left\|2\overrightarrow{MA}-4\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|$



الجواب: 1) G مرجح النقطتين $(A;2)$ و $(B;-4)$ اذن حسب الخاصية المميزة للمرجح فان :

$$2\overrightarrow{MA}-4\overrightarrow{MB}=(3+(-5))\overrightarrow{MG}=-2\overrightarrow{MG}$$

و لدينا $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}$ وبما أن : I منتصف القطعة $[AB]$

فان : $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ منه : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$

2) $\left\|2\overrightarrow{MA}-4\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|$ يعني $\left\|-2\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MI}\right\|$

يعني $2MG=2MI$ يعني $MG=MI$

ومنه مجموعة النقط هي واسط القطعة $[GI]$

تمرين2: (1ن+1ن+1ن)

$A(2;3)$ و $B(1;-2)$ نقطتين من المستوى.

وليكن G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;-1)$ و $\left(B;\frac{3}{2}\right)$ ولتكن E و F نقطتين من المستوى بحيث $\overrightarrow{EG}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{EF}$ و $E\notin(AB)$.

1. حدد احداثيتي G
2. بين أن : G مرجح النقطتين المتزنتين $(E;5)$ و $(F;-2)$
3. استنتج أن المستقيمين (EF) و (AB) يتقاطعان محددا نقطة تقاطعهما.

الأجوبة: 1) إحداثيتي G هما :

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{ax_A+bx_B}{a+b} \\ y_G=\dfrac{ay_A+by_B}{a+b} \end{cases}$$ يعني $$\begin{cases} x_G=\dfrac{-1\times 2+\frac{3}{2}\times 1}{\frac{3}{2}-1} \\ y_G=\dfrac{-1\times 3+\frac{3}{2}\times(-2)}{\frac{3}{2}-1} \end{cases}$$ اذن : $G(-1;-12)$

2) $\overrightarrow{EG}=\frac{-2}{3}\overrightarrow{EF}$ يعني $3\overrightarrow{EG}=-2\left(\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{GF}\right)$ (استعمال علاقة شال)

يعني $3\overrightarrow{EG}=-2\overrightarrow{EG}-2\overrightarrow{GF}$ يعني $5\overrightarrow{EG}+2\overrightarrow{GF}=\vec{0}$

يعني $-5\overrightarrow{GE}+2\overrightarrow{GF}=\vec{0}$ يعني $5\overrightarrow{GE}-2\overrightarrow{GF}=\vec{0}$

يعني G مرجح النقطتين المتزنتين $(E;5)$ و $(F;-2)$

3)لدينا G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;-1)$ و $\left(B;\frac{3}{2}\right)$ اذن : $G\in(AB)$

لدينا G مرجح النقطتين المتزنتين $(E;5)$ و $(F;-2)$ اذن : $G\in(EF)$

اذن المستقيمين (AB) و (EF) لديهم نقطة مشتركة و غير منطبقين

(لأن : $E\notin(AB)$)

وبالتالي : المستقيمين (EF) و (AB) يتقاطعان و G هي نقطة تقاطعهما.

تمرين3: (1,5ن+2ن+2ن+2ن+2ن+1,5ن+1ن+2ن)

نعتبر في المستوى النقط التالية :

$A(2;3)$ و $B(-1;4)$ و $C(0;2)$

1)أحسب : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}$ ماذا تستنتج؟

2)حدد معادلة (Δ) ارتفاع المثلث ABC و المار من النقطة C

3)حدد معادلة للمستقيم (AB)

4)حدد زوج إحداثيتي النقطة H المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB)

5)حدد زوج إحداثيتي Ω منتصف القطعة $[AB]$ وأحسب AB

6)بين أن معادلة ديكارتية للدائرة (C) التي أحد أقطارها $[AB]$ هي : $(C): x^2+y^2-x-7y+10=0$

7)أحسب مسافة النقطة C عن المستقيم (AB)

8)أدرس وحدد نقط تقاطع (C) مع محوري المعلم

الجواب:1) لدينا : $\overrightarrow{AC}(-2;-1)$ و $\overrightarrow{BC}(1;-2)$

اذن : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=1\times(-2)+(-2)\times(-1)=-2+2=0$

ومنه : $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$ وبالتالي: المثلث ABC قائم الزاوية في C

2) (Δ) ارتفاع المثلث ABC و المار من النقطة C

يعني (Δ) عمودي على (AB) ويمر من C

ومنه : $\overrightarrow{AB}(-3,1)$ متجهة منظميه على (Δ)

نعلم أن معادلة مستقيم تكتب على الشكل :

$(D)/ax+by+c=0$ و $\overrightarrow{AB}(a,b)$ متجهة منظميه على (Δ)

اذن : $a=-3;b=1$ ومنه المعادلة تصبح : $(\Delta)/-3x+y+c=0$

ونعلم أن : $C\in(\Delta)$ اذن احداثيات C تحقق المعادلة يعني :

$-3\times 0+2+c=0 \Leftrightarrow c=-2$ ومنه : $(\Delta)/-3x+y-2=0$

3)نحدد معادلة ديكارتية للمستقيم (AB):

$(AB)/ax+by+c=0$

$\overrightarrow{AB}(-3,1)$ متجهة موجهة ل (AB) $\overrightarrow{AB}(-b,a)$ اذن : $a=1;b=3$

ومنه المعادلة تصبح: $(AB)/x+3y+c=0$

ولدينا $A\in(AB)$ اذن : $2+9+c=0 \Leftrightarrow c=-11$

ومنه : $(AB)/x+3y-11=0$

4) H هي نقطة تقاطع (Δ) و(AB) اذن احداثيات H هي حلول النظمة :

$$\begin{cases}-3x+y-2=0:(\Delta)\\ x+3y-11=0:(AB)\end{cases}$$ يعني $$\begin{cases}-3x+y=2\\ x+3y=11\end{cases}$$ نستعمل طريقة المحددات لحل هذه النظمة :

محددة النظمة (1) هي: $\Delta=\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-10\neq 0$

و منه النظمة تقبل حلا وحيدا:هو $x=\dfrac{\begin{vmatrix}2 & 1\\ 11 & 3\end{vmatrix}}{-10}=\dfrac{-5}{-10}=\dfrac{1}{2}$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 1 & 11\end{vmatrix}}{-10}=\frac{-35}{-10}=\frac{7}{2}$$ و منه: $H\left(\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right)$

5) $\Omega\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ يعني $\Omega\left(\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right)$

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$$

6) شعاع هذه الدائرة هو : $R=\frac{AB}{2}$ اذن $R=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

مركز الدائرة (C) هو : $\Omega\left(\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right)$ منتصف القطعة $[AB]$

ومنه معادلة الدائرة هي : $(C)\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2$

يعني : $(C)\ x^2+y^2-x-7y+10=0$

7) $C(0;2)$ و $(AB)/x+3y-11=0$

اذن : $d(C;(AB))=CH=\frac{|0+3\times2-11|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{|-5|}{\sqrt{10}}=\frac{5}{\sqrt{10}}=\frac{5\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

8) أ)احداثيات نقط تقاطع (C) مع محور الأفاصيل

نضع : $y=0$ فنجد : $x^2-x+10=0$

نحل المعادلة باستعمال المميز $a=1$ و $b=-1$ و $c=10$

$\Delta=b^2-4ac=1-40=-39<0$

ومنه للمعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$

وبالتالي الدائرة لا تقطع محور الأفاصيل

ب) احداثيات نقط تقاطع (C) مع محور الأراتيب:

نضع : $x=0$ فنجد : $y^2-7y+10=0$

نحل المعادلة باستعمال المميز $a=1$ و $b=-7$ و $c=10$

$\Delta=b^2-4ac=49-40=9>0$

ومنه للمعادلة حلين هما : $y_1=\frac{7+3}{2}=5$ و $y_2=\frac{7-3}{2}=2$

ومه نقطتا التقاطع هما : $E(0;5)$ و $F(0;2)$

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.
c'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien