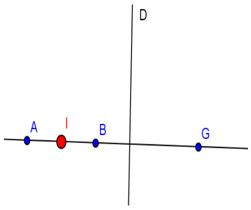
تصحيح الفرض المحروس رقم 2 B

تمرين 1: (2ن+1ن)

لتكن I منتصف القطعة $[AB]$ و G مرجح النقطتين

1. بين أن: $3\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}=-2\overrightarrow{MG}$ و أن: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$ مهما تكن النقطة M من المستوى
2. استنتج مجموعة M من المستوى بحيث: $\left\|3\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|$



الجواب: 1) G مرجح النقطتين $(A;3)$ و $(B;-5)$ اذن حسب الخاصية المميزة للمرجح فان:

$$3\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}=\left(3+(-5)\right)\overrightarrow{MG}=-2\overrightarrow{MG}$$

و لدينا $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}$ وبما أن: I منتصف القطعة $[AB]$

فان: $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ منه: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$

(2 $\left\|3\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|$ يعني $\left\|-2\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MI}\right\|$

يعني $2MG=2MI$ يعني $MG=MI$

ومنه مجموعة النقط هي واسط القطعة $[GI]$

تمرين 2: (1ن+1ن+1ن)

$A(2;1)$ و $B(-4;3)$ نقطتين من المستوى.

وليكن G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;-1)$ و $\left(B;\frac{4}{3}\right)$ ولتكن M و N نقطتين من المستوى بحيث $\overrightarrow{MG}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{MN}$ و $M\notin(AB)$.

1. حدد احداثيتي G
2. بين أن: G مرجح النقطتين المتزنتين $(M;5)$ و $(N;-3)$
3. استنتج أن المستقيمين (MN) و (AB) يتقاطعان محددا نقطة تقاطعهما.

الأجوبة: 1) إحداثيتي G هما:

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{ax_A+bx_B}{a+b} \\ y_G=\dfrac{ay_A+by_B}{a+b}\end{cases}$$ يعني $$\begin{cases} x_G=\dfrac{-1\times 2+\frac{4}{3}\times(-4)}{\frac{4}{3}-1} \\ y_G=\dfrac{-1\times 1+\frac{4}{3}\times 3}{\frac{4}{3}-1}\end{cases}$$ اذن: $G(-22;9)$

(2 $\overrightarrow{MG}=\frac{-3}{2}\overrightarrow{MN}$ يعني $2\overrightarrow{MG}=-3\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GN}\right)$ (استعمال علاقة شال)

يعني $2\overrightarrow{MG}=-3\overrightarrow{MG}-3\overrightarrow{GN}$ يعني $5\overrightarrow{MG}+3\overrightarrow{GN}=\vec{0}$

يعني $-5\overrightarrow{GM}+3\overrightarrow{GN}=\vec{0}$ يعني $5\overrightarrow{GM}-3\overrightarrow{GN}=\vec{0}$

يعني G مرجح النقطتين المتزنتين $(M;5)$ و $(N;-3)$

3) لدينا G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;-1)$ و $\left(B;\frac{4}{3}\right)$ اذن: $G\in(AB)$

لدينا G مرجح النقطتين المتزنتين $(M;5)$ و $(N;-3)$ اذن: $G\in(EF)$

اذن المستقيمين (AB) و (EF) لديهم نقطة مشتركة وغير منطبقين

(لأن: $M\notin(AB)$)

وبالتالي: المستقيمين (EF) و (AB) يتقاطعان و G هي نقطة تقاطعهما.

تمرين 3: (2ن+1ن+1,5ن+2ن+2ن+2ن+2ن+1,5ن)

نعتبر في المستوى النقط التالية:

$A(1;2)$ و $B(-2;3)$ و $C(0;4)$

1) أحسب: $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}$ ماذا تستنتج؟

2) حدد معادلة (Δ) ارتفاع المثلث ABC و المار من النقطة C

3) حدد معادلة للمستقيم (AB)

4) حدد زوج إحداثيتي النقطة H المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB)

5) حدد زوج إحداثيتي Ω منتصف القطعة $[AB]$ وأحسب AB

6) بين أن معادلة ديكارتية للدائرة (C) التي أحد أقطارها $[AB]$ هي: $(C):x^2+y^2+x-5y+4=0$

7) أحسب مسافة النقطة C عن المستقيم (AB)

8) أدرس وحدد نقط تقاطع (C) مع محوري المعلم

الجواب: 1) لدينا: $\overrightarrow{AC}(-1;2)$ و $\overrightarrow{BC}(2;1)$

اذن: $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=2\times(-1)+1\times 2=-2+2=0$

ومنه: $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$ وبالتالي: المثلث ABC قائم الزاوية في C

2) (Δ) ارتفاع المثلث ABC و المار من النقطة C

يعني (Δ) عمودي على (AB) ويمر من C

ومنه: $\overrightarrow{AB}(-3,1)$ متجهة منظمية على (Δ)

نعلم أن معادلة مستقيم تكتب على الشكل:

$(D)/ax+by+c=0$ و $\overrightarrow{AB}(a,b)$ متجهة منظمية على (Δ)

اذن: $a=-3;b=1$ ومنه المعادلة تصبح: $(\Delta)/-3x+y+c=0$

ونعلم أن: $C\in(\Delta)$ اذن احداثيات C تحقق المعادلة يعني:

$-3\times 0+4+c=0\Leftrightarrow c=-4$ ومنه: $(\Delta)/-3x+y-4=0$

3) نحدد معادلة ديكارتية للمستقيم (AB):

$(AB)/ax+by+c=0$

$\overrightarrow{AB}(-3,1)$ متجهة موجهة ل (AB) $\overrightarrow{AB}(-b,a)$ اذن: $a=1;b=3$

ومنه المعادلة تصبح: $(AB)/x+3y+c=0$

ولدينا $A\in(AB)$ اذن: $1+6+c=0\Leftrightarrow c=-7$

ومنه: $(AB)/x+3y-7=0$

4) H هي نقطة تقاطع (Δ) و (AB) اذن احداثيات H هي حلول النظمة:

$$\begin{cases}-3x+y-4=0:(\Delta)\\ x+3y-7=0:(AB)\end{cases}$$ يعني $$\begin{cases}-3x+y=4\\ x+3y=7\end{cases}$$ نستعمل طريقة المحددات لحل هذه النظمة:

محددة النظمة (1) هي: $\Delta=\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-10\neq 0$

و منه النظمة تقبل حلا وحيدا: هو $x=\frac{\begin{vmatrix}4&1\\7&3\end{vmatrix}}{-10}=\frac{5}{-10}=-\frac{1}{2}$

و منه: $y=\frac{\begin{vmatrix}-3&4\\1&7\end{vmatrix}}{-10}=\frac{-25}{-10}=\frac{5}{2}$ $H\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$

5) $\Omega\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ يعني $\Omega\left(-\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$

$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$

6) شعاع هذه الدائرة هو : $R=\frac{AB}{2}$ اذن $R=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

مركز الدائرة (C) هو : $\Omega\left(-\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$ منتصف القطعة $[AB]$

ومنه معادلة الدائرة هي : $(C)\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2$

يعني : $(C)\ x^2+y^2+x-5y+4=0$

7) $C(0;4)$ و $(AB)/x+3y-7=0$

اذن : $d(C;(AB))=CH=\frac{|0+3\times4-7|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{|5|}{\sqrt{10}}=\frac{5}{\sqrt{10}}=\frac{5\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

8) أ)احداثيات نقط تقاطع (C) مع محور الأفاصيل

نضع : $y=0$ فنجد : $x^2+x+4=0$

نحل المعادلة باستعمال المميز $a=1$ و $b=1$ و $c=4$

$\Delta=b^2-4ac=1-16=-15<0$

ومنه للمعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$

وبالتالي الدائرة لا تقطع محور الأفاصيل

ب) احداثيات نقط تقاطع (C) مع محور الأراتيب:

نضع : $x=0$ فنجد : $y^2-5y+4=0$

نحل المعادلة باستعمال المميز $a=1$ و $b=-5$ و $c=4$

$\Delta=b^2-4ac=25-16=9>0$

ومنه للمعادلة حلين هما : $y_1=\frac{5+3}{2}=4$ و $y_2=\frac{5-3}{2}=1$

ومه نقطتا التقاطع هما : $E(0;4)$ و $F(0;1)$

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.

c'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien