تمرين1: 14 pts (1ن+ 1ن+ 2ن+ 1ن+2ن+ 2ن+ 2ن+ 1ن+2ن)

لتكن f دالة عددية معرفة بما يلي: $f(x)=\dfrac{x^2-3x+6}{x-2}$

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f
2. بين أن : $\forall x\in D_f \quad : f(x)=x-1+\dfrac{4}{x-2}$
3. أحسب النهايات عند محدات D_f
4. أدرس الفروع اللانهائية لمنحنى الدالة f (تحديد معادلة المقاربات و المقاربات المائلة ل C_f).
5. بين أن النقطة $\Omega(2;1)$ مركز تماثل منحنى الدالة f.
6. حدد الدالة المشتقة و ادرس إشارتها.
7. أعط جدول تغيرات f على D_f.
8. حدد احداثيات نقط تقاطع المنحنى (C_f) الممثل للدالة مع محوري المعلم.
9. أنشئ المنحنى C_f.

الأجوبة: 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x-2\neq 0\}$

ومنه $D_f=\mathbb{R}-\{2\}=]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$

2)نقوم بالقسمة الاقليدية ل x^2-3x+6 على $x-2$ فنجد :

$x^2-3x+6=(x-2)(x-1)+4$

اذن :

$$f(x)=\frac{(x-2)(x-1)+4}{x-2}=\frac{(x-2)(x-1)}{x-2}+\frac{4}{x-2}=x-1+\frac{4}{x-2}$$

3) $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^2-3x+6}{x-2}=\dfrac{4}{0^+}=+\infty$ و

$\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^2-3x+6}{x-2}=\dfrac{4}{0^-}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$

4) $x=2$ مقارب للمنحنى (C_f)

$f(x)=x-1+\dfrac{4}{x-2}$ يعني $f(x)-(x-1)=\dfrac{4}{x-2}$

يعني $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-(x-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x-2}=\dfrac{4}{+\infty}=0$ ومنه المستقيم ذا المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

ولدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)-(x-1)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4}{x-2}=\dfrac{4}{-\infty}=0$ ومنه المستقيم ذا المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

5) $\Omega(2;1)$ $\Omega(a;b)$

أ)نبين أنه : اذا كانت $x\in\mathbb{R}-\{2\}$ فان : $4-x\in\mathbb{R}-\{2\}$ ؟؟؟

$$\Leftrightarrow 4-x\neq 4-2\Leftrightarrow -x\neq -2\Leftrightarrow x\neq 2\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}-\{2\}$$

$$4-x\in\mathbb{R}-\{2\}\Leftrightarrow 4-x\neq 2\Leftrightarrow$$

ب)نبين أن : $f(4-x)+f(x)=2=2b$ ؟؟؟؟

$$f(4-x)+f(x)=4-x-1+\frac{1}{4-x-2}+x-1+\frac{4}{x-2}$$

$$=4-2+\frac{1}{2-x}+\frac{1}{x-2}=2-\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-2}=2$$

ومنه $\Omega(2;1)$ مركز تماثل منحنى الدالة f.

6) لدينا : $f(x)=x-1+\dfrac{4}{x-2}$

$$f'(x)=\left(x-1+\frac{4}{x-2}\right)'=1-\frac{4}{(x-2)^2}=\frac{(x-2)^2-4}{(x-2)^2}$$

يعني $f'(x)=\dfrac{(x-2)^2-2^2}{(x-2)^2}=\dfrac{(x-2-2)(x-2+2)}{(x-2)^2}=\dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$

اشارة $f'(x)$ هي اشارة : $x(x-4)$

$x(x-4)=0$ يعني $x=0$ أو $x-4=0$ يعني $x=0$ أو $x=4$

جدول الإشارة :

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

7) جدول تغيرات الدالة :

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	‖	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

8) أ)نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاصيل

نحل فقط المعادلة : $f(x)=0$ يعني $\dfrac{x^2-3x+6}{x-2}=0$

يعني $x^2-3x+6=0$

نحل المعادلة باستعمال المميز

$a=1$ و $b=-3$ و $c=6$

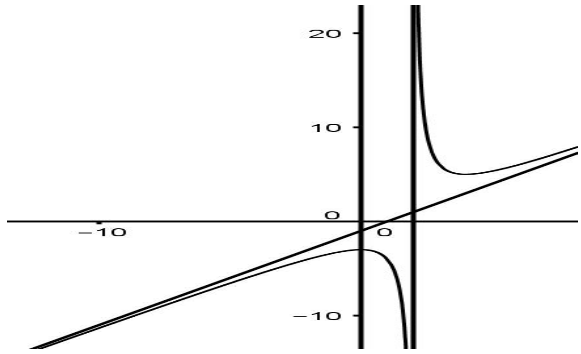
$\Delta=b^2-4ac=9-24=-15<0$

بما أن $\Delta<0$ فان هذه المعادلة ليس لها حل وبالتالي التمثيل المبياني لا يقطع محور الأفاصيل

ب)نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأراتيب

نحسب فقط : $f(0)$ لدينا $f(0)=-3$ ومنه نقطة التقاطع هي: $C(0;-3)$

9) التمثيل المبياني للدالة :



تمرين2: (6ن) (1ن+1.5ن+ 2ن+ 1.5ن)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ المستقيم (D) المار من $B(1;-1;-2)$ و الموجه بالمتجهة $\vec{w}(2;1;4)$ و المستوى (P) الذي يمر من $A(3;-1;1)$ و $\vec{u}(1;2;3)$ و $\vec{v}(1;-1;1)$ متجهتين موجهتين له .

1. حدد تمثيلا بارامتريا للمستوى (P) و تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D)

2. أدرس استوائية المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية .

3. أعط معادلة ديكارتية للمستوى (P)

4. أدرس الوضع النسبي للمستوى (P) و المستقيم (D)

الجواب: 1) المستوى (P) يمر من $A(3;-1;1)$ و $\vec{u}(1;2;3)$ و $\vec{v}(1;-1;1)$ متجهتين موجهتين له

اذن : $(P):\begin{cases} x=3+t+t' \\ y=-1+2t-t' \\ z=1+3t+t' \end{cases}$ حيث $(t\in\mathbb{R})$ و $(t'\in\mathbb{R})$ هو

تمثيل بارا متريا للمستوى $P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)$

المستقيم (D) يمر من $B(1;-1;-2)$ و موجه بالمتجهة $\vec{w}(2;1;4)$

اذن : $(D)\begin{cases} x=2t+1 \\ y=t-1 \\ z=4t-2 \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

(2

$$\det\left(\vec{u};\vec{v};\vec{w}\right)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}=1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det\left(\vec{u};\vec{v};\vec{w}\right)=-5-4+6+9=6\neq 0$$

ومنه : المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ غير مستوائية

(3

نلاحظ أن $\vec{u}(1;2;3)$ و $\vec{v}(1;-1;1)$ غير مستقيميتين

$M(x;y;z)\in P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)$ يعني $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستوائية

يعني : $\det\left(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v}\right)=0$ $A(3;-1;1)$

$\overrightarrow{AM}(x-3;y+1;z-1)$ يعني : $\begin{vmatrix} x-3 & 1 & 1 \\ y+1 & 2 & -1 \\ z-1 & 3 & 1 \end{vmatrix}=0$

يعني : $(x-3)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}-(y+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}+(z-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=0$

يعني : $5(x-3)+2(y+1)-3(z-1)=0$ يعني : $5x-15+2y+2-3z+3=0$

يعني : $(P):5x+2y-3z-10=0$

4) $(P):5x+2y-3z-10=0$ و $(D)\begin{cases} x=2t+1 \\ y=t-1 \\ z=4t-2 \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

اذن : $5(1+2t)+2(t-1)-3(4t-2)-10=0$ يعني $-1=0$

غير ممكن اذن : (D) و (P) متوازيان قطعا

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.
c'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien