تمرين1:

14 pts ((ن1+ ن1+ ن2+ ن1+ن2+ ن2+ ن2+ ن1+ن2))

لتكن f دالة عددية معرفة بما يلي: $f(x)=\frac{x^2+x-1}{x+2}$

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f
2. بين أن : $f(x)=x-1+\frac{1}{x+2}$: $\forall x\in D_f$
3. أحسب النهايات عند محدات D_f
4. أدرس الفروع اللانهائية لمنحنى الدالة f (تحديد معادلة المقاربات و المقاربات المائلة ل C_f.)
5. بين أن النقطة $\Omega(-2;-3)$ مركز تماثل منحنى الدالة f .
6. حدد الدالة المشتقة و ادرس إشارتها.
7. أعط جدول تغيرات f على D_f.
8. حدد احداثيات نقط تقاطع المنحني (C_f) الممثل للدالة مع محوري المعلم.
9. أنشئ المنحنى C_f.

الجواب:

1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x+2\neq0\}$

ومنه $D_f=\mathbb{R}-\{-2\}=]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$

2) نقوم بالقسمة الاقليدية ل x^2+x-1 على $x+2$ فنجد :

$x^2+x-1=(x+2)(x-1)+1$

اذن :

$$f(x)=\frac{(x+2)(x-1)+1}{x+2}=\frac{(x+2)(x-1)}{x+2}+\frac{1}{x+2}=x-1+\frac{1}{x+2}$$

ومنه : $a=1$ و $b=-1$ و $c=1$

3) $\lim_{x\to-2^+}f(x)=\lim_{x\to-2^+}\frac{x^2+x-1}{x+2}=\frac{1}{0^+}=+\infty$ و

$\lim_{x\to-2^-}f(x)=\lim_{x\to-2^+}\frac{x^2+x-1}{x+2}=\frac{1}{0^-}=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$

4) $x=-2$ مقارب للمنحنى (C_f)

$f(x)=x-1+\frac{1}{x+2}$ يعني $f(x)-(x-1)=\frac{1}{x+2}$

يعني $\lim_{x\to+\infty}f(x)-(x-1)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{+\infty}=0$ ومنه المستقيم ذا المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

ولدينا : $\lim_{x\to-\infty}f(x)-(x-1)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{-\infty}=0$ ومنه المستقيم ذا المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

5) $\Omega(-2;-3)$ $\Omega(a;b)$

أ)نبين أنه : اذا كانت $x\in\mathbb{R}-\{-2\}$ فان : $-4-x\in\mathbb{R}-\{-2\}$ ؟؟؟

$\Leftrightarrow -4-x\neq-4+2\Leftrightarrow -x\neq2\Leftrightarrow x\neq-2\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}-\{-2\}$

$-4-x\in\mathbb{R}-\{-2\}\Leftrightarrow -4-x\neq-2\Leftrightarrow$

ب)نبين أن : $f(-4-x)+f(x)=-6=2b$ ؟؟؟؟

$$f(-4-x)+f(x)=-4-x-1+\frac{1}{-4-x+2}+x-1+\frac{1}{x+2}$$

$$=-4-2+\frac{1}{-x-2}+\frac{1}{x+2}=-6+-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+2}=-6$$

ومنه $\Omega(-2;-3)$ مركز تماثل منحنى الدالة f .

6) $f'(x)=\left(x-1+\frac{1}{x+2}\right)'=1-\frac{1}{(x+2)^2}=\frac{(x+2)^2-1}{(x-2)^2}$ يعني

$$f'(x)=\frac{(x+2)^2-1^2}{(x+2)^2}=\frac{(x+2-1)(x+2+1)}{(x+2)^2}=\frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$$

اشارة $f'(x)$ هي اشارة : $(x+1)(x+3)$

$(x+1)(x+3)=0$ يعني $x+1=0$ أو $x+3=0$ يعني $x=-1$ أو $x=-3$

جدول الإشارة :

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

7) جدول تغيرات الدالة :

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-5	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

8) أ)نقط تقاطع المنحنى (C_f) الممثل للدالة f مع محور الأفاصيل

نحل فقط المعادلة : $f(x)=0$ يعني $\frac{x^2+x-1}{x+2}=0$

يعني $x^2+x-1=0$

نحل المعادلة باستعمال المميز

$a=1$ و $b=1$ و $c=-1$

$\Delta=b^2-4ac=1^2-4\times1\times(-1)=5>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ و $x_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

ومنه نقط التقاطع هما: $A\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};0\right)$ أو $B\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2};0\right)$

ب)نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأراتيب

نحسب فقط : $f(0)$ لدينا $f(0)=-\frac{1}{2}$ ومنه نقطة التقاطع هي: $C\left(0;-\frac{1}{2}\right)$

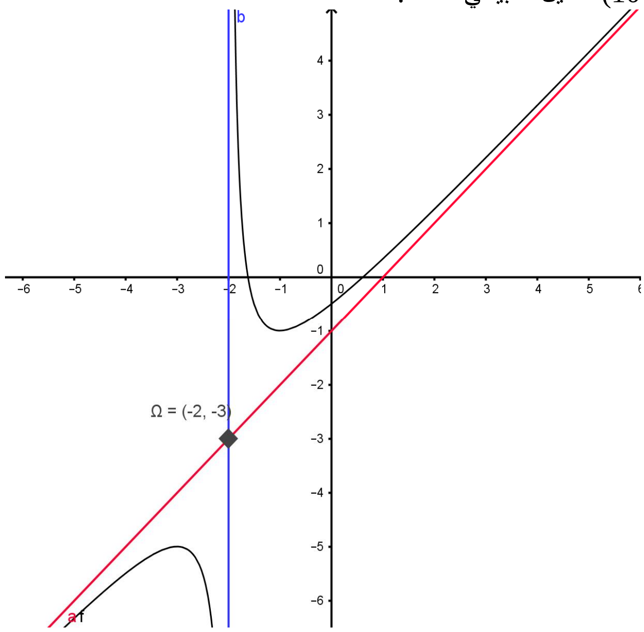
9) معادلة المماس في النقطة ذات الأفصول 2.

2) $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

$f'(0)=\frac{(0+1)(0+3)}{(0+2)^2}=\frac{3}{4}$ و $f(0)=-\frac{1}{2}$

$y=-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}x \Leftrightarrow y=f(0)+f'(0)(x-0)$

10) التمثيل المبياني للدالة :



تمرين2: (6ن) **(1ن +1.5ن +2ن +1.5ن)**

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ المستقيم (D) المار من $B(-1;0;1)$ و الموجه بالمتجهة $\vec{w}(3;-1;2)$ و المستوى (P) الذي يمر من $A(3;-1;1)$ و $\vec{u}(1;-2;0)$ و $\vec{v}(1;2;1)$ متجهتين موجهتين له .

1. حدد تمثيلا بارامتريا للمستوى (P) و تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D)
2. أدرس استوائية المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية .
3. أعط معادلة ديكارتية للمستوى (P)
4. أدرس الوضع النسبي للمستوى (P) و المستقيم (D)

الجواب:

الجواب: 1) المستوى (P) يمر من $A(3;-1;1)$ و $\vec{u}(1;-2;0)$ و $\vec{v}(1;2;1)$ متجهتين موجهتين له

اذن : $(P):\begin{cases} x=3+t+t' \\ y=-1-2t+2t' \\ z=1+t' \end{cases}$ حيث $(t\in\mathbb{R})$ و $(t'\in\mathbb{R})$ هو تمثيل بارا متريا للمستوى $P(A;\vec{u};\vec{v})$

المستقيم (D) يمر من $B(-1;0;1)$ و موجه بالمتجهة $\vec{w}(3;-1;2)$

اذن : $(t\in\mathbb{R})$ $(D)\begin{cases} x=3t-1 \\ y=-t \\ z=2t+1 \end{cases}$

2) $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}=1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}+0\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$

$\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=5-2+0=3\neq 0$

ومنه : المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ غير مستوائية

3) نلاحظ أن $\vec{u}(1;-2;0)$ و $\vec{v}(1;2;1)$ غير مستقيميتين

$M(x;y;z)\in P(A;\vec{u};\vec{v})$ يعني $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستوائية

يعني : $\det(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v})=0$ $A(3;-1;1)$

$\overrightarrow{AM}(x-3;y+1;z-1)$ يعني : $\begin{vmatrix} x-3 & 1 & 1 \\ y+1 & -2 & 2 \\ z-1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$

يعني : $(x-3)\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}-(y+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}+(z-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}=0$

يعني : $-2(x-3)-1(y+1)-0(z-1)=0$ يعني : $-2x+6-y-1=0$

يعني : $(P):-2x-y+5=0$

4) $(P):-2x-y+5=0$ و $(D)\begin{cases} x=3t-1 \\ y=-t \\ z=2t+1 \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

اذن : $-2(3t-1)-(-t)+5=0$ يعني $t=\frac{7}{5}$

اذن : (D) يقطع المستوى (P) في النقطة :

$\begin{cases} x=3\times\frac{7}{5}-1=\frac{16}{5} \\ y=-\frac{7}{5} \\ z=2\frac{7}{5}+1=\frac{19}{5} \end{cases}$

$H\left(\frac{16}{5};-\frac{7}{5};\frac{19}{5}\right)$ هي نقطة التقاطع