أكاديمية وجدة

تصحيح الفرض المنزلي رقم 1

مستوى الأولى علوم

تمرين1: $3\text{ pts}=6\times0.5$

I. تحديد قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية :

$\left((-3)^2=-9\right)$ و $\sqrt{16}\in\mathbb{N}$ خاطئة

$(\pi=3,14)$ أو $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$ خاطئة

$(a\ge3\Rightarrow a\ge5$ $\quad a\in\mathbb{N}$ خاطئة

$\exists! x\in IR;\ 2x^2-x-1=0$ خاطئة

$(\forall x\in\mathbb{R});x^2\ge x$ خاطئة

II. أكتب العبارة التالية باستعمال المكممات:

" مهما يكن العدد الحقيقي الموجب قطعا x ، يوجد على الأقل عدد صحيح نسبي n بحيث n أكبر قطعا من x " $P:$

$\overline{P};\ (\forall x>0);\ (\exists n\in\mathbb{Z});n>x$

تمرين2: $2\text{ pts}=4\times0.5$

أوجد العبارات النافية للعبارات الآتية:

1. $(\sqrt{5}>3)$ أو $A:\sqrt{2}\in\mathbb{R}$

2. كل نوافد القسم مفتوحة : B

3. $C:(\forall x\in\mathbb{N});x>2\Rightarrow x^2\ge4$

4. $D\ (\forall x\in\mathbb{N});(\exists y\in\mathbb{N});x=2y+1$

الجواب:1) $(\sqrt{5}\le3)$ و $\overline{A}:\sqrt{2}\notin\mathbb{R}$

2) توجد نافذة فبي القسم غير مفتوحة : $\overline{B}$

3) $\overline{C}:(\exists x\in\mathbb{N});x>2$ و $x^2<4$

4) $\overline{D}\ (\exists x\in\mathbb{N});(\forall y\in\mathbb{N});x\ne2y+1$

تمرين3: $4\text{ pts}=2\times1\text{ pts}+2\text{ pts}$

1)أ) بين أن : $12n+14\ge6(n+1)+7\quad\forall n\in\mathbb{N}$

ب)بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن : $2^n\ge6n+7\quad\forall n\ge6$

2)بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن

$$\forall n\in\mathbb{N}^*:1^2+2^2+3^2+\dots\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

الجواب: 1)أ) نحسب الفرق :

و$12n+14-6(n+1)-7=12n+14-6n-6-7=6n+1\ge0$

منه $12n+14\ge6(n+1)+7$ لأن $n\in\mathbb{N}$

1)ب) نبين أن : $2^n\ge6n+7\quad\forall n\ge6$ ؟؟؟؟؟

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=6$

لدينا $2^6\ge6\times6+7$ لأن : $64\ge43$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=6$

المرحلة2: نفترض أن: $2^n\ge6n+7$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $2^{n+1}\ge6(n+1)+7$ ؟؟؟؟؟

لدينا حسب افتراض الترجع: $2^n\ge6n+7$

اذن : $2\times2^n\ge2\times(6n+7)$

يعني : $2^{n+1}\ge12n+14$ اذن لم نجد بعد النتيجة

وحسب السؤال 1)أ) لدينا : $12n+14\ge6(n+1)+7\quad\forall n\in\mathbb{N}$

لدينا اذن : $2^{n+1}\ge12n+14$ و $12n+14\ge6(n+1)+7$

ومنه : $2^{n+1}\ge6(n+1)+7$

وبالتالي : $2^n\ge6n+7\quad\forall n\ge6$

2) نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

لدينا $1^2=\frac{1\times(1+1)\times(2+1)}{6}=\frac{1\times2\times3}{6}=1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

المرحلة2: نفترض أن: $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6}$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)\times(n+2)\times(2n+3)}{6}$ ؟

لدينا : $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2+(n+1)^2=\left(1^2+2^2+3^2+\dots+n^2\right)+(n+1)^2$

ولدينا حسب افتراض الترجع : $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6}$

اذن : $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$

$$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2+(n+1)^2=(n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6}+(n+1)\right)$$

$$=(n+1)\left(\frac{n(2n+1)+6(n+1)}{6}\right)=(n+1)\left(\frac{2n^2+7n+6}{6}\right)$$

ويمكننا أن نلاحظ أن : $2n^2+7n+6=(n+2)(2n+3)$

ومنه : $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)\times(n+2)\times(2n+3)}{6}$

تمرين4: 1.5 pts

بين باستعمال الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس أن :

$$(x\in\mathbb{R});x\ne9\Rightarrow\frac{2x+6}{x-3}\ne4$$

الجواب: الجواب :نستعمل الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس

اذن يكفي أن نبين أن : $\frac{2x+6}{x-3}=4\Rightarrow x=9$ ؟؟؟؟؟

لدينا: $\frac{2x+6}{x-3}=4\Rightarrow2x+6=4(x-3)$

$2x+6=4(x-3)\Rightarrow2x+6=4x-12\Rightarrow-2x=-18\Rightarrow x=9$

ومنه : $\frac{2x+6}{x-3}=4\Rightarrow x=9$

وبالتالي : $(x\in\mathbb{R});x\ne9\Rightarrow\frac{2x+6}{x-3}\ne4$

تمرين5: 1.5 pts باستعمال الاستدلال بفصل الحالات :

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $(E):10-2|x-1|=4x+1$

الجواب: الجواب :ندرس اشارة : $x-1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$

الحالة 1: اذا كانت: $x\ge1$ فان : $x-1\ge0$ ومنه: $|x-1|=x-1$

$10-2x+2=4x+1\Leftrightarrow10-2(x-1)=4x+1\Leftrightarrow(E)$

$x=\frac{11}{6}\in S\Leftrightarrow-6x=-11\Leftrightarrow$

الحالة 2: اذا كانت $x\le 1$: فان $10+2(x-1)=4x+1\Leftrightarrow(E)$

$\Leftrightarrow 10+2x-2=4x+1\Leftrightarrow -2x=-7\Leftrightarrow x=\frac{7}{2}\notin S$ لأن : $\frac{7}{2}>1$

ومنه مجموعة الحلول هي : $S=\left\{\frac{11}{6}\right\}$

تمرين6: $3\text{ pts}=3*1\text{pts}$

حدد مجموعة تعريف الدوال المعرفة كالتالي $f(x)=\frac{|x|(2x+1)}{x(2x^2+x-3)}$

و $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}-1}$ و $h(x)=\sqrt{3-x^2}$

الجواب: $f(x)=\frac{|x|(2x+1)}{x(2x^2+x-3)}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x(2x^2+x-3)\neq 0\}$

$x(2x^2+x-3)=0\Leftrightarrow x=0$ أو $2x^2+x-3=0$

نحل المعادلة باستعمال المميز $2x^2+x-3=0$

$a=2$ و $b=1$ و $c=-3$

$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times2\times(-3)=1+24=25=(5)^2>0$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{-1+\sqrt{25}}{2\times2}=\frac{-1+5}{4}=\frac{4}{4}=1$ و $x_2=\frac{-1-5}{2\times2}=\frac{-6}{4}=-\frac{3}{2}$

ومنه: $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{3}{2};0;1\right\}$

$g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}-1}$

$D_g=\{x\in\mathbb{R}/x\ge 0 et \sqrt{x}-1\neq 0\}$

$\sqrt{x}-1=0$ يعني $\sqrt{x}=1$ يعني $x=1$

ومنه : $D_g=[0;1[\cup]1;+\infty]$

$h(x)=\sqrt{3-x^2}$ $D_h=\{x\in\mathbb{R}/3-x^2\ge 0\}$

$3-x^2=0\Leftrightarrow(\sqrt{3})^2-x^2=0\Leftrightarrow(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)=0$

$\Leftrightarrow\sqrt{3}-x=0$ أو $\sqrt{3}+x=0\Leftrightarrow x=\sqrt{3}$ أو $x=-\sqrt{3}$

نحدد جدول الاشارة :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$3-x2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

ومنه: $D_h=[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$

تمرين7: $3\text{ pts}=3*1\text{pts}$ نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي :

$f(x)=\frac{2x^2+4x+3}{x^2+2x+2}$

1)حدد D_f 2)بين أن الدالة f مكبورة بالعدد 2 على $\mathbb{R}$.

3)بين أن الدالة f تقبل قيمة دنيا عند $x=-1$

الجواب:1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+2x+2\neq 0\}$

نحل المعادلة باستعمال المميز $x^2+2x+2=0$

$a=1$ و $b=2$ و $c=2$

$\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times1\times2=-4<0$

ومنه المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$ ومنه: $D_f=\mathbb{R}$

2) يكفي أن نبين أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)\le 2$

اذن نحسب الفرق :

$2-f(x)=2-\frac{2x^2+4x+3}{x^2+2x+2}=\frac{2(x^2+2x+2)-(2x^2+4x+3)}{x^2+2x+2}$

$2-f(x)=\frac{2x^2+4x+4-2x^2-4x-3}{x^2+2x+2}=\frac{1}{x^2+2x+2}$

بالنسبة للحدودية x^2+2x+2 وجدنا أن : $\Delta<0$

ومنه اشارتها هي اشارة $a=1$ أي أن : $x^2+2x+2>0$

وبما أنه لدينا : $1>0$ فان : $\frac{1}{x^2+2x+2}\ge 0$

ومنه : $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)\le 2$ بالتالي : f مكبورة بالعدد 2 على $\mathbb{R}$.

3) يكفي أن نبين أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ f(-1)\le f(x)$

$f(-1)=\frac{2-4+3}{1-2+2}=1$

$f(x)-f(-1)=\frac{2x^2+4x+3}{x^2+2x+2}-1=\frac{2x^2+4x+3-(x^2+2x+2)}{x^2+2x+2}=\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}$

اذن : $f(x)-f(-1)=\frac{(x+1)^2}{x^2+2x+2}$

بالنسبة للحدودية : x^2+2x+2 سبق وأن وجدنا أن : $x^2+2x+2>0$

ونعلم أن : $(x+1)^2\ge 0$ اذن : $f(x)-f(-1)\ge 0$

ومنه : $\forall x\in\mathbb{R}\ f(-1)\le f(x)$

و بالتالي فان الدالة f تقبل قيمة دنيا عند $x=-1$

تمرين8: 2 pts $g(x)=5x^2-4x$ و $f(x)=x^2-2$

أدرس الوضع النسبي لمنحنى الدالة f و منحنى الدالة g

الجواب: $D_f=\mathbb{R}$ و $D_g=\mathbb{R}$ لأنهم دوال حدودية

$g(x)-f(x)=5x^2-4x-x^2+2=4x^2-4x+2$

$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times4\times2=-16<0$

ومنه اشارتها هي اشارة $a=4$ أي أن : $4x^2-4x+2>0$

ومنه : $g(x)-f(x)\ge 0$ أي $g\ge f$ بالتالي منحنى الدالة g يوجد فوق منحنى الدالة f على $\mathbb{R}$.

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.

c'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien