تمرين1: 4pts (1ن+1ن+2ن)

لتكن (C) الدائرة التي معادلتها الديكارتية هي :

$$x^2+y^2+4x+4y-2=0$$

و المستقيم (D) الذي معادلته : $x+3y-2=0$

1. حدد مركز وشعاع الدائرة (C)
2. بين أن المستقيم (D) مماس للدائرة (C)
3. حدد إحداثيتي نقطه تماس الدائرة (C) و المستقيم (D)

الجواب: 1)نحدد مركز وشعاع الدائرة (C)

$$a=4;b=4;c=-2$$

نحسب :

$$a^2+b^2-4c=(4)^2+(4)^2-4\times-2=16+16+8=40>0$$

ومنه : (E) دائرة مركزها $\Omega(\frac{-a}{2};\frac{-b}{2})$ أي : $\Omega(-2;-2)$

وشعاعها : $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=\frac{\sqrt{40}}{2}=\sqrt{10}$

2)نحسب $d(\Omega,(P))$ ونقارنها مع شعاع الدائرة

$$d(\Omega,(P))=\frac{|-2-6-2|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{|-10|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}=R$$

ومنه : المستقيم (D) مماس للدائرة (C)

3)نحدد احداثيات نقطة التماس T

معادلة الدائرة هي : $(x+2)^2+(y+2)^2=10$

نحل اذن النظمة التالية :

$$\begin{cases}(1)(x+2)^2+(y+2)^2=10\\(2)x+3y-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(1)(x+2)^2+(y+2)^2=10\\(2)x=2-3y\end{cases}$$

نعوض في المعادلة (1) $x=2-3y$ فنجد : $y^2-2y+1=0$

يعني : $(y-1)^2=0$ يعني : $y=1$ ومنه : $x=-1$

ومنه نقطة التماس هي : $T(-1;1)$

تمرين2: 5 pts (3ن+1ن+1ن)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n\in\mathbb{N}\ \begin{cases}u_{n+1}=\dfrac{u_n-1}{3+u_n}\\u_0=0\end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي:

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n=\frac{1}{1+u_n}$$

1. أحسب $v_{n+1}-v_n$ و استنتج طبيعة المتتالية (v_n)
2. أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

الجواب: 1) $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}+1}-\frac{1}{u_n+1}$ نعوض u_{n+1} ب $\frac{u_n-1}{3+u_n}$

فنجد:

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{\frac{u_n-1}{3+u_n}+1}-\frac{1}{u_n+1}=\frac{1}{\frac{2u_n+2}{3+u_n}}-\frac{1}{u_n+1}=\frac{u_n+3}{2u_n+2}-\frac{2}{2u_n+2}$$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+3-2}{2u_n+2}=\frac{u_n+1}{2u_n+2}=\frac{u_n+1}{2(u_n+1)}=\frac{1}{2}=r$$

ومنه (v_n)متتالية حسابية أساسها : $r=\frac{1}{2}$ وحدها الأول : $v_0=1$

2) بما أن : (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0=1$

فان : $v_n=v_0+nr$ أي : $v_n=1+\frac{n}{2}$

ونعلم أن : $v_n=\frac{1}{u_n+1}$ يعني $u_n+1=\frac{1}{v_n}$ يعني $u_n=\frac{1}{v_n}-1$

ونعلم أن : $v_n=1+\frac{n}{2}$ اذن :

$$u_n=\frac{1}{1+\frac{n}{2}}-1=\frac{1}{\frac{n+2}{2}}-1=\frac{2}{n+2}-1=\frac{2-n-2}{n+2}=\frac{-n}{n+2}$$

تمرين3: 5 pts (1,5ن +1,5ن +0,5ن+1,5ن)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n\in\mathbb{N}\ \begin{cases}u_{n+1}=\dfrac{4u_n-2}{u_n+1}\\u_0=1\end{cases}$$

1. بين أن المتتالية (u_n)مصغورة بالعدد 1
2. بين أن المتتالية (u_n)مكبورة بالعدد 2
3. ماذا تستنتج ؟
4. أدرس رتابة المتتالية (u_n)

الجواب: 1) يكفي ان نبين أن: $\forall n\in\mathbb{N}\quad 1\le u_n$ ؟؟؟؟

نستعمل برهانا بالترجع

◎ نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0=1\ge1$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

◎ نفترض أن: $u_n\ge1$

◎ نبين أن: $u_{n+1}\ge1$ ؟؟؟؟؟

نحسب الفرق : $u_{n+1}-1=\frac{4u_n-2}{u_n+1}-1=\frac{4u_n-2-(u_n+1)}{u_n+1}=\frac{3u_n-3}{u_n+1}$

$u_{n+1}-1=\frac{3(u_n-1)}{u_n+1}$ و حسب افتراض الترجع لدينا : $u_n\ge1$

اذن : $u_n-1\ge0$ و $u_n+1>0$ و منه $u_{n+1}-1\ge0$

وبالتالي: $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\ge1$

2)يكفي ان نبين أن: $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n\le2$ ؟؟؟؟

نستعمل برهانا بالترجع

◎ نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0=1\le2$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

◎ نفترض أن: $u_n\le2$

◎ نبين أن: $u_{n+1}\le2$ ؟؟؟؟؟

نحسب الفرق : $2-u_{n+1}=2-\frac{4u_n-2}{u_n+1}=\frac{2(u_n+1)-(4u_n-2)}{u_n+1}=\frac{-2u_n+4}{u_n+1}$

$2-u_{n+1}=\frac{2(2-u_n)}{u_n+1}$ و حسب افتراض الترجع لدينا : $u_n\le 2$

اذن : $2-u_n\ge 0$ و $u_n+1>0$ و منه $2-u_{n+1}\ge 0$

وبالتالي: $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n\le 2$

3) المتتالية العددية (u_n) محدودة لأنها مكبورة ومصغورة

4) $u_{n+1}-u_n=\frac{4u_n-2}{u_n+1}-u_n=\frac{4u_n-2-u_n(u_n+1)}{u_n+1}=\frac{-u_n^2+3u_n-2}{u_n+2}$

نعمل $-u_n^2+3u_n-2$ نحسب المميز Δ

$\Delta=9-8=1>0$ هناك جذرين : $x_1=\frac{-3+1}{-2}=1$ و $x_2=\frac{-3-1}{-2}=2$

ومنه التعميل : $-u_n^2+3u_n-2=-(u_n-1)(u_n-2)$

ومنه : $u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n-1)(u_n-2)}{u_n+1}$

لدينا : $u_n\ge 1$ اذن : $u_n\ge 0$ و $u_n-1\ge 0$

و لدينا : $u_n\le 2$ اذن : $u_n-2\le 0$

ومنه: $u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n-1)(u_n-2)}{u_n+1}\ge 0$ وبالتالي (u_n) تزايدية

تمرين5: 3 pts (1,5ن +1,5ن)

بين أن : $\forall x\in\mathbb{R}$

1) $\cos(4x)=8\cos^4x-8\cos^2x+1$

2) $\sin(4x)=4\sin x\left(2\cos^3x-\cos x\right)$

الجواب:1) $\cos(4x)=\cos(2\times 2x)=2\cos^2 2x-1=2\left(2\cos^2x-1\right)^2-1$

$=2\left(4\cos^4x-4\cos^2x+1\right)-1=8\cos^4x-8\cos^2x+1$

(2 $\sin(4x)=\sin(2\times 2x)=2\sin 2x\cos 2x=2\times 2\sin x\cos x\left(2\cos^2x-1\right)$

$\sin(4x)=4\sin x\cos x\left(2\cos^2x-1\right)=4\sin x\left(2\cos^3x-\cos x\right)$

تمرين4: 3 pts (1ن+1ن+1ن)

علما أن : $\sin x=\frac{2}{3}$ و $x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

أحسب 1) $\cos x$ 2) $\cos(2x)$ 3) $\sin(2x)$

الجواب:1) لدينا : $\cos^2x+\sin^2x=1$ يعني $\cos^2x=1-\sin^2x$ يعني

$\cos^2x=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2$

يعني $\cos^2x=\frac{5}{9}$ يعني $\cos x=\frac{\sqrt{5}}{3}$ أو $\cos x=-\frac{\sqrt{5}}{3}$ ونعلم أن : $x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

اذن : $\cos x=\frac{\sqrt{5}}{3}$

2) نعلم أن : $\cos(2x)=1-2\sin^2x$

اذن : $\cos(2x)=1-2\left(\frac{2}{3}\right)^2=1-\frac{8}{9}=\frac{1}{9}$

3) نعلم أن : $\sin(2x)=2\sin x\times\cos x$ ومنه :

$\sin(2x)=2\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{4\sqrt{5}}{9}$

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.
c'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien