تمرين1: (10ن) (0.5ن+0.5ن +1ن +1ن +0.5ن+0.5ن +1,5ن +1.5ن +1.5ن +1.5ن)

أحسب النهايات التالية :

(1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^2+3x^3+x}{6x^5-x-1}$ (2 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-8x^5+2x^2+1}{x-1}$

(3 $\lim\limits_{x\to3^\pm}\dfrac{3x-2}{-2x+6}$ (4 $\lim\limits_{x\to-1^\pm}\dfrac{2x+1}{-2x^2-x+1}$

(5 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 4x}{\tan 2x}$ (6 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{3x-7}{|3x-1|}$

(7 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+2}-x$ (8 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{x^2-1}$

(9 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$ (10 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x+4}-2}$

الجواب:(1

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2+3x^3+x}{6x^5-x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2}{6x^5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{6x^3}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-8x^5+2x^2+1}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-8x^5}{x}=\lim_{x\to-\infty}-8x^4=-\infty \text{(2}$$

(3 $\lim\limits_{x\to3^\pm}\dfrac{3x-2}{-2x+6}$

لدينا $\lim\limits_{x\to3^+}3x-2=7$ و $\lim\limits_{x\to3^+}-2x+6=0$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$-2x+6$	+	0	−

ومنه : $\lim\limits_{x\to3^\pm}\dfrac{3x-2}{-2x+6}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{3x-2}{-2x+6}=+\infty$

(4 $\lim\limits_{x\to-1^\pm}\dfrac{2x+1}{-2x^2-x+1}$

$\lim\limits_{x\to-1^\pm}2x+1=-1$ و $\lim\limits_{x\to-1^\pm}-2x^2-x+1=0$

ندرس اشارة $-2x^2-x+1$

نلاحظ1- جذرللحدودية $-2x^2-x+1$

اذن : هي تقبل القسمة على: $x+1$

وباستعمال تقنية القسمة الاقليدية

نجد أن: $-2x^2-x+1=(x+1)(-2x+1)$

ومنه: $-2x^2-x+1=0$ يعني $(x+1)(-2x+1)=0$

يعني $x=-1$ أو $x=\dfrac{1}{2}$

x	$-\infty$	-1		$1/2$	$+\infty$
$-2x^2-x+1$	−	0	+	0	−

ومنه : $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{2x+1}{-2x^2-x+1}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{2x+1}{-2x^2-x+1}=+\infty$

(5 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 4x}{\tan 2x}$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 4x}{\tan 2x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 4x}{4x}\times\frac{4x}{\tan 2x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 4x}{\tan 2x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 4x}{4x}\times\frac{2x}{\tan 2x}\times2=1\times1\times2=2$$

(6 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{3x-7}{|3x-1|}$

لدينا : $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}3x-7=-6$ و $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}|3x-1|=0^+$

ومنه : $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{3x-7}{|3x-1|}=-\infty$

(7 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+2}-x$

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+2}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}-x=-\infty$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $+\infty-\infty$

نتخلص من ال ش غ م بالتعميل ب x^2 داخل الجذر مربع:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+2}-x=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2\left(4+\frac{2}{x^2}\right)}-x=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2}\sqrt{\left(4+\frac{2}{x^2}\right)}-x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}|x|\sqrt{\left(4+\frac{2}{x^2}\right)}-x$$

لأن : $\sqrt{x^2}=|x|$ وبما أن: $x\to+\infty$ فان : $\sqrt{x^2}=|x|=x$

ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+2}-x=\lim\limits_{x\to+\infty}x\sqrt{\left(4+\frac{2}{x^2}\right)}-x=$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{\left(4+\frac{2}{x^2}\right)}-1\right)=+\infty\times(1)=+\infty$$

لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\left(4+\frac{2}{x^2}\right)}=2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x^2}=0$

(8 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{x^2-1}$

لدينا $\lim\limits_{x\to1}\sqrt{3x+1}-2=0$ و $\lim\limits_{x\to1}x^2-1=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\dfrac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م بالضرب ***بالمرافق*** ثم بالاختزال:

$$\frac{\sqrt{3x+1}-2}{x^2-1}=\frac{\left(\sqrt{3x+1}-2\right)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{3x+1}\right)^2-2^2}{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}=\frac{3x-3}{\left(x^2-4\right)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}$$

$$=\frac{3(x-1)}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}=\frac{3}{(x+1)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{3x+1}-2}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{3}{(x+1)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}=\frac{3}{8}$$

(9 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$

لدينا: $\lim\limits_{x\to2}x^3-8=0$ و $\lim\limits_{x\to2}x^2-4=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلا بالتعميل ثم بالاختزال:

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{x^3-2^3}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to2}\frac{x^2+2x+4}{x+2}=3$$

(10

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\sqrt{x+4}-2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}\left(\sqrt{x+4}+2\right)$$

$$=\lim_{x\to0}3\frac{\sin 3x}{3x}\left(\sqrt{x+4}+2\right)=3\times1\times4=12$$

تمرين2: **(5ن)** نقطة لكل سؤال

نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=\frac{x^3-8}{x^2-4}$

1) أحسب النهايات التالية : $\lim_{x\to2^+}f(x)$ و $\lim_{x\to2^-}f(x)$

و $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)$

2) هل الدالة تقبل نهاية عند : $x_0=2$ ؟

الجواب: 1)ندرس اشارة x^2-4 :

$$(x-2)(x+2)=0\Leftrightarrow x^2-2^2=0$$

$$x=2 \text{ أو } x=-2\Leftrightarrow x-2=0 \text{ أو } x+2=0\Leftrightarrow$$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x2-4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\begin{cases}f(x)=\frac{x^3-2^3}{x^2-4},x\in]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[\\ f(x)=-\frac{x^3-2^3}{x^2-4},x\in]-2,2[\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=\frac{x^3-8}{x^2-4},x\in]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[\\ f(x)=-\frac{x^3-8}{x^2-4},x\in]-2,2[\end{cases}$$

$$\begin{cases}f(x)=\frac{x^2+2x+4}{x+2},x\in]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[\\ f(x)=-\frac{x^2+2x+4}{x+2},x\in]-2,2[\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)},x\in]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[\\ f(x)=-\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)},x\in]-2,2[\end{cases}$$

لدينا : $\lim_{x\to2^+}x^2+2x+4=12$ و $\lim_{x\to2^+}x+2=4$

ومنه : $\lim_{x\to2^+}f(x)=3$

ومنه : $\lim_{x\to2^-}f(x)=-3$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-8}{x^2-4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}-\frac{x^3-8}{x^2-4}=\lim_{x\to-\infty}-\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}-x=+\infty$$

2) نلاحظ أن: $\lim_{x\to4^-}f(x)\neq\lim_{x\to4^+}f(x)$ ومنه

الدالة f لاتقبل نهاية عند : $x_0=2$

تمرين3: **(5ن)** نقطة لكل سؤال

$ABCD$ مربع مركزه O و (D) مستقيم يوازي المستقيم (BD) و يقطع (AD) في M و (AB) في N

وليكن r الدوران الذي مركزه O و زاوية $\frac{\pi}{2}$

نعتبر النقطتين E و F صورتي النقطتين M و N بالدوران r على ا لتوالي.

1. أرسم الشكل و بين أن : $(EF)\perp(MN)$
2. حدد صورة المستقيم (BD)بالدوران r

بين أن : $DN=FA$ وبين أن : $(EF)\parallel(AC)$

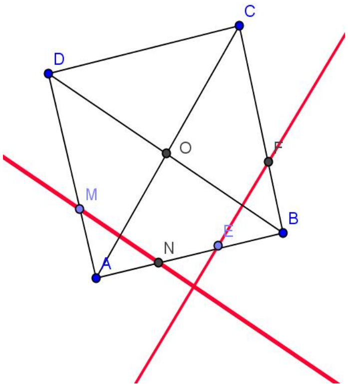
الجواب: (1

1)لدينا :

❶ $r(M)=E$ و

❷ $r(N)=F$

من ❶و❷ نستنتج أن :



$(EF)\perp(MN)$: أي أن $\left(\overline{\overrightarrow{MN},\overrightarrow{EF}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

2) صورة المستقيم (BD)بالدوران r ؟؟؟

لدينا : $\begin{cases}0B=0C\\ \left(\overline{\overrightarrow{0B},\overrightarrow{OC}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$ اذن : $r(B)=C$ ❶

ولدينا : $\begin{cases}0D=0A\\ \left(\overline{\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OA}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$ اذن : $r(D)=A$ ❷

من ❶و❷ نستنتج أن: $r((BD))=(AC)$

3) أ) $DN=FA$ ؟؟؟

ولدينا : ❶ $r(D)=A$ و ❷ $r(N)=F$

اذن : $DN=FA$ لأن : الدوران يحافظ على المسافة

ب)نبين أن : $(EF)\parallel(AC)$:

لدينا : $(MN)\parallel(BD)$حسب المعطيات و لدينا :

و $r((BD))=(AC)$ و $r((MN))=(EF)$

وبما أن : الدوران يحافظ على التوازي فان : $(EF)\parallel(AC)$