

Exercice 1 : (correction)

- Le nombre $A = (n+3)(n+4)+5$ est impair car $(n+3)(n+4)$ est pair (produit de deux nombres consécutifs) et 5 impair.
Le nombre $B = 3^{2015} + 4^{2016}$ est impair (somme de deux nombres de différente parité).
Le nombre $C = 3n^2 + n$ est car $C = 3n^2 + n = n(n+1) + 2n^2$ somme de deux nombres pairs.
Le nombre $D = (n+7) + (n+8)$ est impair (somme de deux nombres de consécutifs).
- a, b et c trois nombres consécutifs
Si a est pair alors a+b+c est impair
Si a est impair alors a+b+c est pair
Si a est pair alors ac est pair (produit de deux nombres de même parité).
Si a est impair alors ac est impair (produit de deux nombres de même parité).

Exercice 2 : (correction) soit n et k deux entiers naturels.

- supposons que $n = 5k + 1$ alors $n^2 + 1 = (5k + 1)^2 - 1 = 25k^2 + 10k + 1 - 1 = 5(5k^2 + 2k)$
donc divisible par 5.
- supposons que si $n = 5k + 2$ alors $n^2 + 1 = (5k + 2)^2 + 1 = 25k^2 + 20k + 4 + 1 = 5(5k^2 + 4k + 1)$
donc divisible par 5.
- (n) ; $(n+1)$, $(n+2)$, $(n+3)$ et $(n+4)$ sont cinq nombres entiers consécutifs
et on a $(n) + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) = 5n + 10 = 5(n+2)$
donc c' est un multiple de 5.
- $(2n)$, $(2n+2)$ et $(2n+4)$ sont trois nombres pairs consécutifs
et on a $(2n) + (2n+2) + (2n+4) = 6n + 6 = 6(n+1)$ donc c'est un multiple de 6.
- $(2n+1)$, $(2n+3)$ et $(2n+5)$ sont trois nombres impairs consécutifs
et on a $(2n+1) + (2n+3) + (2n+5) = 6n + 9 = 3(2n+3)$ donc c'est un multiple de 3.
- n, m et k trois entiers naturels,
supposons que $3n + 2m$ et $7n + 5m$ sont deux multiples de k
alors $3n + 2m = kp$ et $7n + 5m = kq$

$$\begin{cases} 5 \times 3n + 2m = kp \\ -2 \times 7n + 5m = kq \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} 15n + 10m = 5kp \\ -14n + -10m = -2kq \end{cases}$$
d'où $n = 5kp - 2kq = k(5p - 2q)$ donc n est multiple de k.

Exercice 3 : (correction)

- $A = 49 \times 11 + 7$ n'est pas premier car il est divisible par 7
 $B = 5 \times 2 \times 7 + 24$ n'est pas premier car il est divisible par 2
 $C = 33 + 11 \times 7$ n'est pas premier car il est divisible par 11
- 17^2 n'est pas premier car il est divisible par 17
Les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{317}$ sont : 2 - 3 - 5 - 7 - 11 - 13 et 17
ils ne divisent pas 317 donc il est premier.

Exercice 4 : (correction)

- On pose $A = 5^{n+2} - 5^n$ avec $n \in \mathbb{N}$
On a $A = 5^{n+2} - 5^n = 5^n(5^2 - 1) = 5^n(25 - 1) = 5^n \times 24 = 5^n \times 2^3 \times 3$

Donc $A = 5^n \times 2^3 \times 3 = 6 \times (5^n \times 2^2)$ donc divisible par 6.

2. On pose $B = 3^{n+3} + 3^n$ avec $n \in \mathbb{N}$

$$B = 3^{n+3} + 3^n = 3^n(3^3 + 1) = 3^n \times 28 = 3^3 \times 2^2 \times 7$$

On a $B = 3^3 \times 2^2 \times 7 = 14 \times (3^n \times 2)$ donc divisible par 14.

Exercice 5: (correction)

1. On a $E = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$

2. On a $E = 2n + 1$ donc E est un entier impair pour tout n de \mathbb{N}

3. D'après la première question :

$$17 = 2 \times 8 + 1 = 9^2 - 8^2$$

$$45 = 2 \times 22 + 1 = 23^2 - 22^2.$$

$$101 = 2 \times 50 + 1 = 51^2 - 50^2$$