

**ملخص درس عموميات حول الدوال**

**I. مجموعة تعريف دالة عددية "تذكير"**

لتكن  $f$  دالة عددية لمتغير حقيقي  $x$ .

مجموعة تعريف الدالة  $f$  هي المجموعة المكونة من جميع الأعداد الحقيقية  $x$  بحيث  $f(x)$  موجود أي  $f(x)$  قابلة للحساب. و يرمز لها غالبا

بالرمز  $D_f$  بمعنى:  $x \in D_f$  تكافئ  $f(x) \in \mathbb{R}$  .  $D_f = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \mathbb{R}\}$

**ملاحظات: 1** إذا كانت  $f$  دالة حدودية فإن  $D_f = \mathbb{R}$

إذا كانت  $f$  دالة معرفة على الشكل:  $f(x) = \sqrt{P(x)}$  فإن  $D_f = \{x \in \mathbb{R} / P(x) \geq 0\}$

إذا كانت  $f$  دالة معرفة على الشكل:  $f(x) = \frac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$  فإن  $D_f = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) > 0\}$

**II. الدالة المكبورة و الدالة المصغورة و الدالة المحدودة**

لتكن  $f$  دالة عددية معرفة على مجال  $I$  من  $\mathbb{R}$ .

• نقول إن  $f$  دالة مكبورة على مجال  $I$  إذا وجد عدد حقيقي  $M$  بحيث:  $\forall x \in I \quad f(x) \leq M$

• نقول إن  $f$  دالة مصغورة على مجال  $I$  إذا وجد عدد حقيقي  $m$  بحيث:  $\forall x \in I \quad f(x) \geq m$

• نقول إن  $f$  دالة محدودة على مجال  $I$  إذا كانت مكبورة و مصغورة على المجال  $I$ .

خاصية: لتكن  $f$  دالة عددية معرفة على مجال  $I$  من  $\mathbb{R}$ . تكون  $f$  دالة محدودة على المجال  $I$  إذا وجد عدد حقيقي  $k$  بحيث:  $\forall x \in I \quad |f(x)| \leq k$

**مثال:** نعتبر الدالة  $f$  المعرفة كالتالي:  $f(x) = x^2 - 2x + 5$

بين أن الدالة  $f$  مصغورة بالعدد 4

الجواب: يكفي أن نبين أن:  $\forall x \in \mathbb{R} \quad 4 \leq f(x)$

اذن نحسب الفرق:  $f(x) - 4 = x^2 - 2x + 5 - 4 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$

ومنه:  $\forall x \in \mathbb{R} \quad 4 \leq f(x)$

وبالتالي  $f$  مصغورة على  $\mathbb{R}$  بالعدد 4

**III. الدالة الدورية**

لتكن  $f$  دالة عددية و  $D$  مجموعة تعريفها.

نقول إن  $f$  دالة دورية إذا وجد عدد حقيقي  $T$  موجب قطعاً بحيث:

• إذا كانت  $x \in D$  فإن  $x+T \in D$

•  $\forall x \in D \quad f(x+T) = f(x)$

مثال: الدوال:  $\cos$  و  $\sin$  دورية و دورهم  $T = 2\pi$

الدالة  $\tan$  دالة دورية و دورها هو:  $T = \pi$

**IV. مطاريف دالة عددية**

**تعريف:** لتكن  $f$  دالة عددية معرفة على مجال  $I$  و  $a$  عنصراً من المجال  $I$

• نقول إن  $f(a)$  هي القيمة القصوى للدالة  $f$  على المجال  $I$ , إذا كان:  $\forall x \in I \quad f(x) \leq f(a)$

• نقول إن  $f(a)$  هي القيمة الدنيا للدالة  $f$  على المجال  $I$ , إذا كان:  $\forall x \in I \quad f(x) \geq f(a)$

**V. مقارنة دالتين**

**تعريف:** لتكن  $f$  و  $g$  دالتين عدديتين و  $D_f$  و  $D_g$  على التوالي مجموعة تعريفهما.

نقول إن  $f$  تساوي  $g$  ونكتب  $f = g$  إذا وفقط إذا كان:

$$(\forall x \in D_f) \quad f(x) = g(x) \quad \text{و} \quad D_g = D_f$$

**تعريف:** لتكن  $f$  و  $g$  دالتين عدديتين معرفتين على مجال  $I$ . نقول إن  $f$  أصغر من أو يساوي  $g$  على مجال  $I$  ونكتب  $f \leq g$

إذا وفقط إذا كان:  $(\forall x \in I) \quad f(x) \leq g(x)$

التأويل الهندسي:  $f \leq g$  على مجال  $I$  يعني هندسياً أن منحنى الدالة  $f$  يوجد تحت منحنى الدالة  $g$  على المجال  $I$ .

**ملحوظة:**

•  $f < g$  على المجال  $I$  إذا وفقط إذا كان:  $(\forall x \in I) \quad f(x) < g(x)$

•  $f \geq 0$  على المجال  $I$  إذا وفقط إذا كان:  $(\forall x \in I) \quad f(x) \geq 0$

**مثال:** قارن الدالتين العدديتين  $f$  و  $g$  المعرفتين كالتالي:  $g(x)=4x-1$  و  $f(x)=4x^2$  واعط تأويلا مبيانيا للنتيجة

**الجواب:**  $D_g = \mathbb{R}$  و  $D_f = \mathbb{R}$  لأنهم دوال حدودية

$$f(x) - g(x) = 4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2 \geq 0$$

ومنه:  $f \geq g$  بالتالي منحنى الدالة  $f$  يوجد فوق منحنى الدالة  $g$  على  $\mathbb{R}$ .

### VI. مركب الدالتين

**تعريف:** لتكن  $f$  و  $g$  دالتين عدديتين و  $D_f$  و  $D_g$  على التوالي مجموعة تعريفهما.  $D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f \text{ و } f(x) \in D_g\}$

الدالة العددية  $h$  المعرفة على  $D_{g \circ f}$  بما يلي:  $h(x) = g(f(x))$ , تسمى مركب الدالتين  $f$  و  $g$  في هذا الترتيب ويرمز لها بالرمز  $g \circ f$

$$\forall x \in D_{g \circ f} (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

### VII. رتابة دالة عددية

#### منحى تغيرات دالة عددية

**تعريف:** لتكن  $f$  دالة عددية و  $I$  مجالا ضمن مجموعة تعريفها.

- $f$  تزايدية قطعاً على المجال  $I$  إذا وفقط إذا كان:  $(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)) (\forall (x_1, x_2) \in I^2)$
- $f$  تناقصية قطعاً على المجال  $I$  إذا وفقط إذا كان:  $(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)) (\forall (x_1, x_2) \in I^2)$
- $f$  ثابتة على المجال  $I$  إذا وفقط إذا كان:  $f(x_1) = g(x_2) (\forall (x_1, x_2) \in I^2)$

**ملحوظة:** يمكن دراسة رتابة دالة  $f$  على مجال  $I$  بدراسة إشارة معدل التغير:  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$  مع عنصرين مختلفين من  $I$

• نقول إن  $f$  دالة رتبية على  $I$  إذا كانت  $f$  تزايدية قطعاً أو تناقصية قطعاً على مجال  $I$ .

**خاصية:** لتكن  $f$  دالة عددية مجموعة تعريفها  $D_f$  متماثلة بالنسبة للصفر. ليكن  $I$  مجالا من  $\mathbb{R}^+$  ضمن  $D_f$  و  $I'$

مماثل  $I$  بالنسبة للصفر

إذا كانت  $f$  دالة زوجية فان:

■  $f$  تزايدية قطعاً على المجال  $I$  إذا وفقط إذا كانت  $f$  تناقصية قطعاً على المجال  $I'$

■  $f$  تناقصية قطعاً على المجال  $I$  إذا وفقط إذا كانت  $f$  تزايدية قطعاً على المجال  $I'$

إذا كانت  $f$  دالة فردية فان:  $f$  لها نفس الرتابة على كل من المجالين  $I$  و  $I'$

### VIII. رتابة مركب الدالتين:

**خاصية:** لتكن  $f$  و  $g$  دالتين عدديتين معرفتين على التوالي

على المجالين  $I$  و  $J$  بحيث:  $f(x) \in J (\forall x \in I)$  لدينا:

- إذا كانت  $f$  تزايدية قطعاً على  $I$  و  $g$  تزايدية قطعاً على  $J$  فان:  $g \circ f$  تزايدية قطعاً على  $I$
- إذا كانت  $f$  تناقصية قطعاً على  $I$  و  $g$  تناقصية قطعاً على  $J$  فان:  $g \circ f$  تزايدية قطعاً على  $I$
- إذا كانت  $f$  تزايدية قطعاً على  $I$  و  $g$  تناقصية قطعاً على  $J$  فان:  $g \circ f$  تناقصية قطعاً على  $I$
- إذا كانت  $f$  تناقصية قطعاً على  $I$  و  $g$  تزايدية قطعاً على  $J$  فان:  $g \circ f$  تناقصية قطعاً على  $I$

### IX. دراسة الدالتين $x \rightarrow \sqrt{x+a}$ و $x \rightarrow ax^3$ :

**مثال 2:** لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة كالتالي:  $f(x) = ax^3 = \frac{1}{4}x^3$

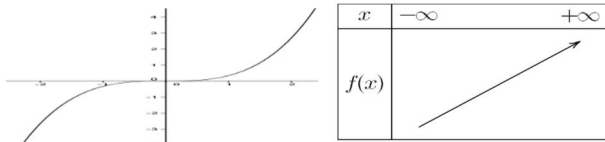
لأنها دالة حدودية  $D_f = \mathbb{R} (a = \frac{1}{4} > 0)$

(2) ليكن:  $x_1 \in \mathbb{R}$   $x_2 \in \mathbb{R}$  بحيث  $x_1 < x_2$

اذن:  $x_1^3 < x_2^3$  ومنه  $\frac{1}{4}x_1^3 < \frac{1}{4}x_2^3$  أي  $f(x_1) < f(x_2)$

ومنه الدالة  $f$  تزايدية على  $\mathbb{R}$

|        |     |    |      |   |     |   |     |
|--------|-----|----|------|---|-----|---|-----|
| $x$    | -3  | -2 | -1   | 0 | 1   | 2 | 3   |
| $f(x)$ | 6.5 | -2 | -1/4 | 0 | 1/4 | 2 | 6.5 |



**ملاحظة:** إذا كان  $a$  سالب قطعاً فان الدالة ستكون تناقصية على  $\mathbb{R}$

**مثال 1:** لتكن  $f$  الدالة العددية

للمتغير الحقيقي  $x$

كالتالي:  $f(x) = \sqrt{x+2}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x+2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -2\} = [-2, +\infty[$  (1)

(2) ليكن:  $x_1 \in [-2, +\infty[$  و  $x_2 \in [-2, +\infty[$  بحيث  $x_1 < x_2$

اذن:  $x_1+2 < x_2+2$  ومنه  $\sqrt{x_1+2} < \sqrt{x_2+2}$  أي  $f(x_1) < f(x_2)$

ومنه الدالة  $f$  تزايدية على  $[-2, +\infty[$

