المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني
المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2015
- الموضوع -

NS 22

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	3
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم التجريبية بمسالكها وشعبة العلوم والتكنولوجيات بمسلكيها	المعامل	7

تعليمات عامة

- يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة ؛
- عدد الصفحات: 3 (الصفحة الأولى تتضمن تعليمات ومكونات الموضوع والصفحتان المتبقيتان تتضمنان موضوع الامتحان) ؛
- يمكن للمترشح إنجاز تمارين الامتحان حسب الترتيب الذي يناسبه ؛
- ينبغي تفادي استعمال اللون الأحمر عند تحرير الأجوبة ؛
- بالرغم من تكرار بعض الرموز في أكثر من تمرين ، فكل رمز مرتبط بالتمرين المستعمل فيه ولا علاقة له بالتمارين السابقة أو اللاحقة .

مكونات الموضوع

- يتكون الموضوع من ثلاثة تمارين ومسألة ، مستقلة فيما بينها ، وتتوزع حسب المجالات كما يلي :

التمرين الأول	الهندسة الفضائية	3 نقط
التمرين الثاني	الأعداد العقدية	3 نقط
التمرين الثالث	حساب الاحتمالات	3 نقط
المسألة	دراسة دالة عددية و حساب التكامل والمتتاليات العددية	11 نقطة

- بالنسبة للمسألة ، ln يرمز لدالة اللوغاريتم النبيري

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2015 - الموضوع | NS 22 | الصفحة 2 / 3

- مادة: الرياضيات - شعبة العلوم التجريبية بمسالكها وشعبة العلوم والتكنولوجيات بمسلكيها

التمرين الأول : (3 ن)

نعتبر، في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$،النقطتين $A(2,1,0)$ و $B(-4,1,0)$

1) ليكن (P) المستوى المار من النقطة A و $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ متجهة منظمية عليه . — 0.5

بين أن $x+y-z-3=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (P)

2) لتكن (S) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق العلاقة $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ — 0.75

بين أن (S) هي الفلكة التي مركزها النقطة $\Omega(-1,1,0)$ و شعاعها 3

3) أ- احسب مسافة النقطة Ω عن المستوى (P) ثم استنتج أن (P) يقطع (S) وفق دائرة (C) — 0.5

ب- بين أن مركز الدائرة (C) هو النقطة $H(0,2,-1)$ — 0.5

4) بين أن $\overrightarrow{OH}\wedge\overrightarrow{OB}=\vec{i}+4\vec{j}+8\vec{k}$ ثم استنتج مساحة المثلث OHB — 0.75

التمرين الثاني : (3 ن)

I- نعتبر العدد العقدي a بحيث $a=2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

1) بين أن معيار العدد العقدي a هو $2\sqrt{2+\sqrt{2}}$ — 0.5

2) تحقق من أن $a=2\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)+2i\sin\frac{\pi}{4}$ — 0.25

3) أ- بإخطاط $\cos^2\theta$ ، حيث θ عدد حقيقي ، بين أن $1+\cos 2\theta=2\cos^2\theta$ — 0.25

ب- بين أن $a=4\cos^2\frac{\pi}{8}+4i\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}$ (نذكر أن $\sin 2\theta=2\cos\theta\sin\theta$) — 0.5

ج- بين أن $4\cos\frac{\pi}{8}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)$ هو شكل مثلثي للعدد a ثم بين أن $a^4=\left(2\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^4 i$ — 0.5

II- نعتبر،في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$،النقطتين Ω و A اللتين لحقاهما على التوالي هما ω و a بحيث $\omega=\sqrt{2}$ و $a=2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ و R الدوران الذي مركزه Ω و زاويته $\frac{\pi}{2}$

1) بين أن اللحق b للنقطة B صورة النقطة A بالدوران R هو $2i$ — 0.5

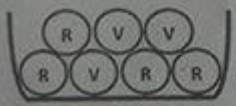
2) حدد مجموعة النقط M ذات اللحق z بحيث $\lvert z-2i\rvert=2$ — 0.5

التمرين الثالث : (3 ن)

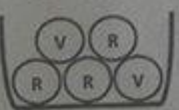
يحتوي صندوق U_1 على 7 كرات : أربع كرات حمراء و ثلاث كرات خضراء (لا يمكن التمييز بينها باللمس)

و يحتوي صندوق U_2 على 5 كرات : ثلاث كرات حمراء و كرتان خضراوان (لا يمكن التمييز بينها باللمس)

الصندوق U_1



الصندوق U_2



I) نعتبر التجربة التالية : نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كرات من الصندوق U_1 — 2

ليكن A الحدث : " الحصول على كرة حمراء واحدة و كرتين خضراوين ".

و B الحدث : " الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون " .

بين أن $p(A)=\frac{12}{35}$ و $p(B)=\frac{1}{7}$

II) نعتبر التجربة التالية : نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من U_1 ثم نسحب عشوائيا كرة واحدة من U_2 — 1

ليكن C الحدث : "الحصول على ثلاث كرات حمراء ".

بين أن $p(C)=\frac{6}{35}$

المسألة : (11 ن)

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x بحيث : $f(x)=\dfrac{1}{x(1-\ln x)}$

و ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة : $2\,cm$)

I) 1) بين أن $D_f=]0,e[\cup]e,+\infty[$ (D_f هي مجموعة تعريف الدالة f) 0.5

2) أ- احسب $\lim\limits_{\substack{x\to e\\x>e}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to e\\x<e}} f(x)$ و أول هندسيا النتيجتين المتوصل إليهما . 0.75

ب- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مقاربا بجوار $+\infty$ يتم تحديده . 0.5

ج- بين أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=+\infty$ ثم أول هندسيا النتيجة (لحساب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)$ لاحظ أن $x(1-\ln x)=x-x\ln x$) 0.5

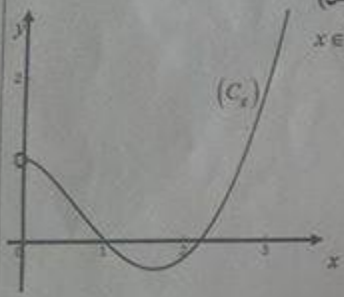
3) أ- بين أن $f'(x)=\dfrac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$ لكل x من D_f 0.75

ب- بين أن الدالة f تناقصية على المجال $]0,1]$ و تزايدية على كل من المجالين $[1,e[$ و $]e,+\infty[$ 1

ج- ضع جدول تغيرات الدالة f على D_f 0.25

II) لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=1-x^2(1-\ln x)$

و ليكن (C_g) المنحنى الممثل للدالة g في معلم متعامد ممنظم (انظر الشكل)



1) أ- حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة (E) التالية : $g(x)=0$ ، $x\in]0,+\infty[$ 0.5

ب- نعطي جدول القيم التالي : 0.5

x	2,1	2,2	2,3	2,4
$g(x)$	−0,14	−0,02	0,12	0,28

بين أن المعادلة (E) تقبل حلا α بحيث $2,2<\alpha<2,3$

2) أ- تحقق من أن $f(x)-x=\dfrac{g(x)}{x(1-\ln x)}$ لكل x من D_f 0.25

ب- بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ يقطع المنحنى (C_f) في النقطتين اللتين أفصولاهما 1 و α 0.5

ج- حدد ، انطلاقا من (C_g) ، إشارة الدالة g على المجال $[1,\alpha]$ و بين أن $f(x)-x\leq 0$ لكل x من $[1,\alpha]$ 0.5

3) أنشئ ، في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ، المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) 1.25

4) أ- بين أن $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)}dx=\ln 2$ (لاحظ أن : $\dfrac{1}{x(1-\ln x)}=\dfrac{\frac{1}{x}}{1-\ln x}$ لكل x من D_f) 0.75

ب- احسب ، ب cm^2 ، مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=\sqrt{e}$ 0.75

III) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0=2$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ لكل n من $I\!N$

1) بين بالترجع أن $1\leq u_n\leq\alpha$ لكل n من $I\!N$ 0.5

2) بين أن المتتالية (u_n) تناقصية (يمكن استعمال نتيجة السؤال II) 2) ج-) 0.5

3) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة و حدد نهايتها . 0.75

بسم الله الرحمن الرحيم

تصحيح الامتحان الوطني 2015 لمادة الرياضيات / ذ محمد بوهو

Azrou

التمرين 1 (الهندسة : 3 نقط) :

لدينا $A(2;1;0)$ و $B(-4;1;0)$, (P) المستوى المار من A والمتجهة $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ منظمية عليه .

① معادلة (P) هي ذات الشكل : $x+y-z+d=0$

وحيث $A\in(P)$ فان $2+1-0+d=0$ أي $d=-3$

ومنه فان $(P): x+y-z-3=0$ وهو المطلوب .

② لنبين أن (S) الفلكة التي مركزها $\Omega(-1;1;0)$ وشعاعها $r=3$

نعلم ان (S) هي مجموعة النقط M التي تحقق $\vec{MA}\cdot\vec{MB}=0$.

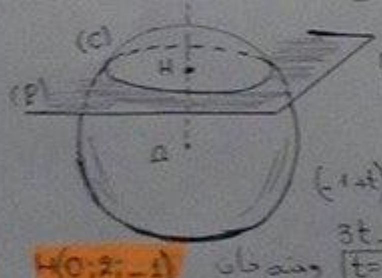
$$\forall M(x;y;z)\in(E):\quad M\in(S)\iff \vec{MA}\cdot\vec{MB}=0$$
$$\iff (x-2)(x+4)+(y-1)(y-1)+(z-0)(z-0)=0$$
$$\iff x^2+2x-8+y^2-2y+1+z^2=0$$
$$\iff (x+1)^2-9+(y-1)^2+z^2=0$$
$$\iff (x+1)^2+(y-1)^2+z^2=9=3^2=r^2$$

وهو المطلوب .

③ أ- حساب مسافة Ω عن المستوى (P) : $d=d(\Omega;(P))$

$$d=\frac{|-1+1-0-3|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}\Rightarrow d(\Omega,(P))=\sqrt{3}<r=3$$

إذن (P) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (C)



ب- H مركز الدائرة (C) هو تقاطع المستوى (P) والمستقيم المار من Ω والعمودي على (P) : $H(x,y,z)$ تحقق :

$$\begin{cases} x+y-z-3=0 \\ x=-1+t \\ y=1+t \quad t\in\mathbb{R} \\ z=0-t \end{cases}$$

اذن $(-1+t)+(1+t)-(-t)-3=0$

أي أن : $3t-3=0$

ومنه فان $\boxed{t=1}$ $H(0;2;-1)$

④ باستعمال قاعدة الجداء المتجهي نبين ان $\vec{OH}\wedge\vec{OB}=\vec{i}+4\vec{j}+8\vec{k}$

ومنه فان مساحة المثلث OHB هي $S=\frac{1}{2}\|\vec{OH}\wedge\vec{OB}\|=\frac{1}{2}\sqrt{1^2+4^2+8^2}$

أي $S=9/2\ u_a$

بسم الله الرحمن الرحيم

تصحيح الامتحان الوطني 2 باك ع مادة الرياضيات / ذ محمد بوهو

Azrou

التمرين 2 (الأعداد العقدية : 3 نقط)

I - لدينا $a = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

① لنبين أن $\boxed{|a| = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}}$: لدينا

$$\begin{cases} Re(a) = 2 + \sqrt{2} \\ Im(a) = \sqrt{2} \end{cases}$$

إذن

$$|a| = \sqrt{(2+\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{8 + 4\sqrt{2}} = \sqrt{4(2+\sqrt{2})}$$
$$= 2\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

وهو المطلوب

② تحقق من أن $a = 2\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right) + 2i\sin\frac{\pi}{4}$.

لدينا

$$a = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2 + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 + 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 2\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right) + 2i\sin\frac{\pi}{4}}$$

وهو المطلوب

③ أ - لدينا

$$\begin{cases} (\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta \\ (\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos^2\theta + 2i\cos\theta.\sin\theta - \sin^2\theta = \\ \quad = (\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 2i\cos\theta.\sin\theta \\ \quad = (2\cos^2\theta - 1) + 2i\cos\theta.\sin\theta \end{cases} \quad (\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 \\ \sin 2\theta = 2\cos\theta.\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} 2\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta \\ \sin 2\theta = 2\cos\theta.\sin\theta \end{cases}}$$

ب - لدينا باستعمال (أ) :

$$a = 2\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right) + 2i\sin\frac{\pi}{4}$$
$$= 2\left(2\cos^2\frac{\pi}{8}\right) + 2i\left(2\sin\frac{\pi}{8}.\cos\frac{\pi}{8}\right) = 4\cos^2\frac{\pi}{8} + 4i\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 4\cos\frac{\pi}{8}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)}$$

ج - ومنه فان الصيغة المثلثية

وحيث أن

$$|a| = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

فان

$$|a| = 4\cos\frac{\pi}{8} = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

إذن

$$a^4 = \left(4\cos\frac{\pi}{8}\right)^4\left[\cos\frac{4\pi}{8} + i\sin\frac{4\pi}{8}\right] = \left(2\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \left(2\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^4 . i$$

$$\Rightarrow \boxed{a^4 = \left(2\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^4 i}$$

تتمة التمرين 2 (الأعداد العقدية)

II - $\Omega(\omega)$ و $A(a)$ حيث $\omega=\sqrt{2}$, $a=2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

R الدوران الذي مركزه Ω وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

① لدينا $R(A)=B$, حيث

$R(M)=M'$; $M(z)$, $M'(z')$

$\Rightarrow z'-\omega = e^{i\pi/2}(z-\omega)$ $\quad (e^{i\pi/2}=i)$

$\Rightarrow z' = i(z-\omega)+\omega$

$\Rightarrow z' = iz - i\omega + \omega$

$\Rightarrow \underline{z' = iz + (1-i)\sqrt{2}}$

ومنه فإن

$b = ia + (1-i)\sqrt{2} = i(2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}) + (1-i)\sqrt{2}$

$= 2i + i\sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{2} - i\sqrt{2}$

$= 2i$

$\Rightarrow b = 2i$

② لنحدد مجموعة $M(z)$ حيث $|z-2i|=2$

$\Leftrightarrow |z-b| = 2$

$\Leftrightarrow BM = 2$

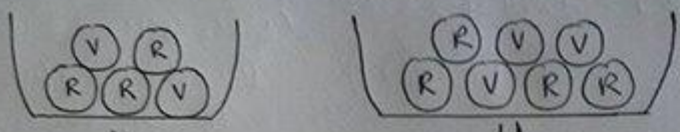
هي الدائرة التي مركزها B وشعاعها 2 .

بسم الله الرحمن الرحيم

تصحيح الامتحان الوطني 2015 مادة الرياضيات / ذ محمد بوهو

Azrou

التمرين 3 (الاحتمالات: 3 نقط)



U_2 U_1

I - نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كرات من الصندوق U_1.

* A الحدث: « الحصول على كرة حمراء واحدة وكرتين خضراوين »

شكل السحبة في الحدث A هو: $\{R;V;V\}$

$\Rightarrow \text{card}A = C_4^1 \times C_3^2 = 4 \times 3 = 12$

$\Rightarrow p(A) = \dfrac{\text{card}A}{\text{card}\Omega}$ (وبما أننا في حالة تساوي الاحتمالات) Ω هو كون الامكانيات

$\Rightarrow p(A) = \dfrac{12}{C_7^3} = \dfrac{12}{35} \Rightarrow \boxed{p(A) = \dfrac{12}{35}}$

* B الحدث: « الحصول على 3 كرات من نفس اللون »

شكل السحبة في الحدث B هو: $\{R;R;R\}$ أو $\{V;V;V\}$

$\Rightarrow p(B) = \dfrac{\text{card}B}{\text{card}\Omega} = \dfrac{C_4^3 + C_3^3}{35} = \dfrac{4+1}{35} = \dfrac{5}{35} = \dfrac{1}{7}$

$\Rightarrow \boxed{p(B) = \dfrac{1}{7}}$

II - التجربة الآن هي: سحب كرتين في آن واحد من U_1 ثم سحب كرة واحدة من U_2.

هنا: Ω' كون الامكانيات $\text{card}\Omega' = C_7^2 \times C_5^1 = 105$

وعدد الامكانيات لسحب 3 كرات حمراء هو: $\text{card}C = C_4^2 \times C_3^1 = 18$

ومنه فإن

$p(C) = \dfrac{\text{card}C}{\text{card}\Omega'} = \dfrac{18}{105} = \dfrac{6}{35}$

ومنه فإن

$\boxed{p(C) = \dfrac{6}{35}}$

بسم الله الرحمن الرحيم

تصحيح الامتحان الوطني 2015 مادة الرياضيات / محمد بوهو Azrou

المسألة (الدوال العددية والمتتاليات : 11 نقطة)

$$f(x)=\frac{1}{x(1-\ln x)}$$

I - ① لنبين أن مجموعة تعريف الدالة f هي $D_f=]0,e[\cup]e,+\infty[$:

$\forall x\in\mathbb{R}:\ x\in D_f \Leftrightarrow f(x)\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \ln x\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq e\end{cases} \Leftrightarrow x\in]0,e[\cup]e,+\infty[$

$\Rightarrow \boxed{D_f=]0,e[\cup]e,+\infty[}$

② أ - حساب $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x>e}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x<e}} f(x)$ والتأويل الهندسي للنتيجة :

$\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x>e}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x>e}} \frac{1}{x(1-\ln x)}=\frac{1}{0^-}=-\infty$

x	0		e		$+\infty$
$1-\ln x$	‖	$+$	0	$-$	

$\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x<e}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x<e}} \frac{1}{x(1-\ln x)}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

التأويل الهندسي : $(\mathcal{C})$ يقبل مقاربا عموديا معادلته $x=e$

ب - حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x(1-\ln x)}=\left(\frac{1}{-\infty}\right)=0$

يعني أن $(\mathcal{C})$ يقبل المستقيم $y=0$ (محور الأفاصيل) كمقارب أفقي بجوار $+\infty$.

ج - لنبين أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$:

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{x(1-\ln x)}$ (بالتعويض نحصل على شكل غير محدد)

$=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{x-x\ln x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$ $\left[\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(x\ln x)=0\ \text{ok}\right]$

$\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$

وهذا يعني أن $(\mathcal{C})$ يقبل مقاربا عموديا معادلته $x=0$ (أي محور الأراتيب)

تابع المسألة (الدالة العددية والمتتاليات) / د محمد بوهو Azrou

③ f - حساب $f'(x)$:

$$\forall x \in D_f : \quad f'(x) = \left(\frac{1}{x(1-\ln x)}\right)' = \frac{-(x - x\ln x)'}{x^2(1-\ln x)^2}$$

وذلك بتطبيق الخاصية $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$

$$\Rightarrow \forall x \in D_f : \quad f'(x) = \frac{-(1-(\ln x + 1))}{x^2(1-\ln x)^2} = \frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\forall x \in D_f : \quad f'(x) = \frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}}$$

ب - * $\forall x \in]0,1[: \quad \ln x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$

لأن المقام $x^2(1-\ln x)^2$ تعبير موجب قطعا)

وهذا يعني ان f تناقصية قطعا على المجال $]0,1[$.

* $\forall x \in]1,e[\cup]e,+\infty[: \begin{cases} \ln x > 0 \\ x^2(1-\ln x)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) > 0$

وهذا يعني ان f تزايدية قطعا على المجالين $]1,e[$ و $]e,+\infty[$.

ج - جدول التغيرات لـ f

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
f	‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	0

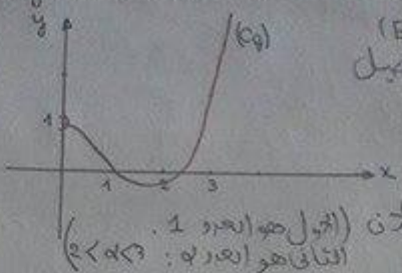
($f'(x)$ تنعدم في النقطة 1)

تصحيح الامتحان الوطني لمادة الرياضيات 2015 .

الجزء II من المسألة (الدوال + المتتاليات)

ذ/ محمد بوهو
Azrou

II _ نعتبر الآن الدالة العددية g المعرفة ب : $g(x) = 1 - x^2(1 - \ln x)$



① أ. حلول المعادلة $(E) : g(x) = 0$
حيث $x \in]0, +\infty[$ هي أفاصيل نقط تقاطع المنحنى (C_g) مع محور الأفاصيل (Ox).

و حسب التمثيل المبياني ل (C_g) فان عدد حلول المعادلة (E) هو : حلان (الأول هو العدد 1 .
الثاني هو العدد α : $2 < \alpha < 3$)

ب) كما سبق في السؤال أ) لاحظنا ان (E) تقبل حلا α على المجال $]2,3[$. ونحصل على جدول القيم :

x	2,1	2,2	2,3	2,4
$g(x)$	-0,14	-0,02	0,12	0,28

لدينا
$g(2,2) = -0,02 < 0$
$g(2,3) = 0,12 > 0$

و حيث ان g دالة متصلة و رتيبة قطعا على $]2,2 ; 2,3[$ فحسب مبرهنة القيم الوسطية :

$$\exists! \alpha \in]2,2 ; 2,3[\ / \ g(\alpha) = 0$$

أي ان المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا α بحيث $2,2 < \alpha < 2,3$.

② أ) لنتحقق من ان : $\forall x \in D_f : \quad f(x) - x = \dfrac{g(x)}{x(1 - \ln x)}$

لدينا

$$\forall x \in D_f : \quad f(x) - x = \frac{1}{x(1 - \ln x)} - x = \frac{1 - x^2(1 - \ln x)}{x(1 - \ln x)}$$

اذن

$$\boxed{\forall x \in D_f : \quad f(x) - x = \frac{g(x)}{x(1 - \ln x)}}$$

ب) لدينا $(\Delta) : y = x$ ، لتحديد تقاطع (C_f) والمستقيم (Δ) يكفي تحديد حلول المعادلة $f(x) = x$.

لدينا

$$\begin{aligned} \forall x \in D_f : \quad f(x) = x &\Leftrightarrow f(x) - x = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{g(x)}{x(1 - \ln x)} = 0 \\ &\Leftrightarrow g(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \text{ أو } x = \alpha \end{aligned}$$

(حسب السؤال ①)

تابع الجزء الثاني من المسألة / ذ محمد بوهو

تصحيح الامتحان الوطني مادة الرياضيات 2015. Azrou

ج) انطلاقا من (C_g) يتبين ان $\forall x \in [1,\alpha] : g(x) \leq 0$ (
 C_g تحت محور الأفاصيل)

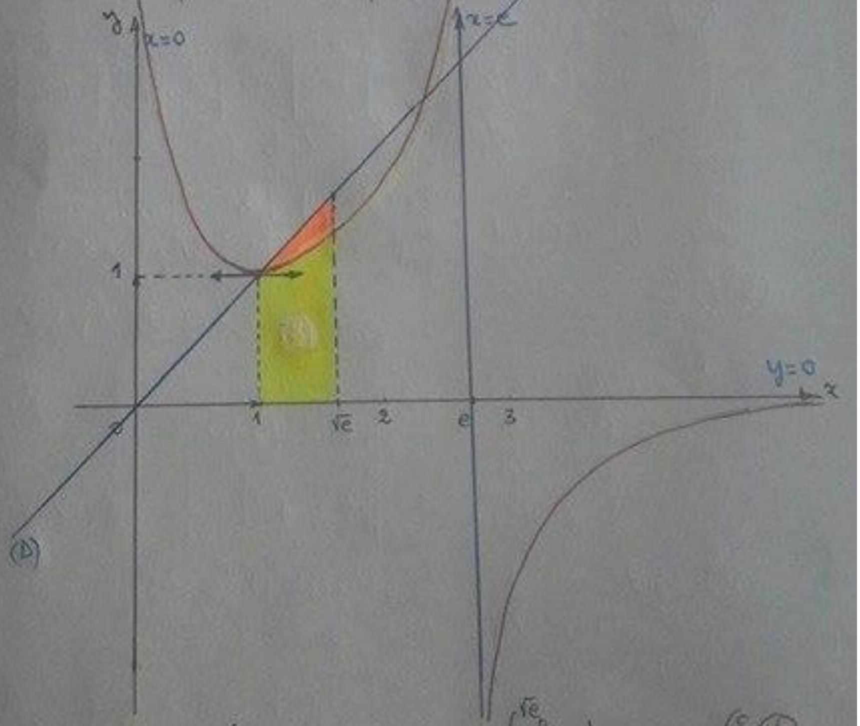
ومنه فان $\forall x \in [1,\alpha] : f(x) - x = \dfrac{g(x)}{x(1-\ln x)} \leq 0$

لان $\begin{cases} g(x) \leq 0 \\ x(1-\ln x) > 0 \end{cases}$ (أنظر I-2-أ)

اذن $\forall x \in [1,\alpha] ; f(x) - x \leq 0$

أي (C_f) تقع تحت (Δ) على المجال $[1,\alpha]$"

3) انشاء (C_f) و (Δ) في نفس المعلم المتعامد الممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة 2cm)



4) أ) حسب $\int_1^{\sqrt{e}} f(x)\,dx$ ($\sqrt{e} \simeq 1{,}6$)

$$\int_1^{\sqrt{e}} f(x)\,dx = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)}\,dx = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1/x}{1-\ln x}\,dx = \Big[-\ln|1-\ln x|\Big]_1^{\sqrt{e}}$$

بتطبيق علاقة الاشتقاق $(\ln|u|)' = \dfrac{u'}{u}$.

تتمة الجزء II من المسألة / ذ. محسن بوهو

تصحيح الامتحان الوطني لمادة الرياضيات 2015 / Azrou

تابع ④ : أ)

$$\int_1^{\sqrt{e}} f(x)\,dx = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x(1-\ln x)} = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1/x}{1-\ln x}\,dx$$

$$= \Big[-\ln|1-\ln x|\Big]_1^{\sqrt{e}} = -\ln|1-\ln\sqrt{e}| + \ln|1-\ln 1|$$

$$= -\ln|1-\tfrac{1}{2}\ln e| + 0$$

$$= -\ln(1-\tfrac{1}{2})$$

$$= -\ln\tfrac{1}{2}$$

$$= \ln 2$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x(1-\ln x)} = \ln 2}$$

وهو المطلوب.

ب) مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C_f) والمستقيم $(\Delta): y=x$ والمستقيمان $x=1$ و $x=\sqrt{e}$: A

(الحيز الملون باللون الأحمر في المبيان)

$$A = \int_1^{\sqrt{e}} (x - f(x))\,dx = \int_1^{\sqrt{e}} x\,dx - \int_1^{\sqrt{e}} f(x)\,dx$$

$$= \Big[\tfrac{1}{2}x^2\Big]_1^{\sqrt{e}} - \ln 2$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}e - \tfrac{1}{2} - \ln 2\right) \times 2 \times 2\ \text{cm}^2.$$

لأن $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\,\text{cm}$

$$\boxed{A = 2\left(e - 2\ln 2 - 1\right)\ \text{cm}^2}$$

نهاية الجزء II من المسألة

تصحيح الامتحان الوطني لمادة الرياضيات 2015 / ذ محمد بوهو
Azrou

الجزء III من المسألة (المتتاليات)

① نعتبر المتتالية (u_n) والمعرفة بما يلي: $u_0=2$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ ، $\forall n\in\mathbb{N}$.

لنبين بالترجع أن $\forall n\in\mathbb{N}: 1\le u_n\le\alpha$

* بالنسبة لـ $n=0$: $u_0=2$ و $1\le 2\le\alpha$ (لأن $2<\alpha<3$)
أن العبارة صحيحة بالنسبة لـ $n=0$
* نفترض أن $1\le u_n\le\alpha$ بالنسبة لـ n من $\mathbb{N}$.
لنبين أن $1\le u_{n+1}\le\alpha$.
* البرهان: لدينا حسب افتراض الترجع $1\le u_n\le\alpha$
و حيث أن f دالة تزايدية قطعا على $[1,e]$ و $[1,\alpha]\subset[1,e]$
فإن

$$1\le u_n\le\alpha \Rightarrow f(1)\le f(u_n)\le f(\alpha)$$
$$\Rightarrow 1\le u_{n+1}\le\alpha \quad (f(\alpha)=\alpha)$$

(لأن α هو حل المعادلة (E): $g(x)=0$ أي $f(\alpha)=\alpha$)
ومن فإن $1\le u_{n+1}\le\alpha$ وهو المطلوب.

خلاصة، $\boxed{(\forall n\in\mathbb{N}):\ 1\le u_n\le\alpha}$

② لنبين أن (u_n) تناقصية: يكفي أن نبين أن $\forall n\in\mathbb{N}: u_{n+1}-u_n\le 0$

لدينا: $\forall n\in\mathbb{N}: u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n$

وحسب II-2) ج) نعلم أن $\forall x\in[1,\alpha]: f(x)-x\le 0$

إذن: بما أن $\forall n\in\mathbb{N}: u_n\in[1,\alpha]$ فإن

$\forall n\in\mathbb{N}: u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n\le 0$.

وهذا يعني أن (u_n) تناقصية.

③ لدينا: * $u_{n+1}=f(u_n)$ ، f دالة متصلة على $[1,\alpha]$
و * (u_n) مصغورة بـ 1
و * (u_n) تناقصية
إذن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة

ونهايتها l تحقق $f(l)=l$ ، وحسب ماسبق فإن $l=1$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}$$

نهاية الجزء III - ونهاية المسألة ... بالتوفيق.