تمرين1: (2 ن)

أحسب وبسط:

الجواب : $A=\sqrt[3]{8}-\left(\sqrt[5]{2}\right)^5+\sqrt{\sqrt[3]{64}}+\frac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}$

$$A=\sqrt[3]{8}-\left(\sqrt[5]{2}\right)^5+\sqrt{\sqrt[3]{64}}+\frac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}=\sqrt[3]{2^3}-\left(\sqrt[5]{2}\right)^5+\sqrt{\sqrt[3]{2^6}}+\sqrt[3]{\frac{80}{5}}$$

$$A=2-2+2+2=2+2=4$$

تمرين2: (4 ن) 3 pts+1 pts

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

الجواب : 1) $\sqrt[3]{2x-1}=3$ 2) $x^{\frac{2}{5}}-3x^{\frac{1}{5}}+2=0$

1) $\sqrt[3]{2x-1}=3$ يعني $\left(\sqrt[3]{2x-1}\right)^3=3^3$

يعني $2x-1=27$ يعني $2x=28$ يعني $x=14$ ومنه :

$S=\{14\}$

2) $x^{\frac{2}{5}}-3x^{\frac{1}{5}}+2=0$ يعني $\left(x^{\frac{1}{5}}\right)^2-3x^{\frac{1}{5}}+2=0$

نضع $x^{\frac{1}{5}}=X$ المعادلة تصبح : $X^2-3X+2=0$

نحل المعادلة باستعمال المميز $a=1$ و $b=-3$ و $c=2$

$$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times1\times2=9-8=1>0$$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$X_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ **و** $X_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$X_1=\frac{3+1}{2\times1}=\frac{4}{2}=2$ **و** $X_2=\frac{3-1}{2\times1}=\frac{2}{2}=1$

ومنه: $x^{\frac{1}{5}}=2$ **أو** $x^{\frac{1}{5}}=1$ **يعني** $\left(x^{\frac{1}{5}}\right)^5=2^5$ **أو** $\left(x^{\frac{1}{5}}\right)^5=1^5$

يعني $x=2^5=32$ **أو** $x=1^5=1$

ومنه : $S=\{1;32\}$

تمرين3: (3ن) 3 pts

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\left[\frac{2}{3};+\infty\right[$ بما يلي :

أدرس اتصال الدالة f في النقطة $x_0=1$

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{3x-2}-1}{x-1} & x\in\left[\frac{2}{3};+\infty\right[-\{1\} \\ f(1)=1 \end{cases}$$

الجواب : $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{3x-2}-1}{x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)''$ ش غ م

نعلم أن : $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$

اذن :

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{3x-2}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt[3]{3x-2}-1\right)\left(\left(\sqrt[3]{3x-2}\right)^2+1\times\sqrt[3]{3x-2}+1^2\right)}{(x-2)\left(\left(\sqrt[3]{3x-2}\right)^2+1\times\sqrt[3]{3x-2}+1^2\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt[3]{3x-2}\right)^3-1^3}{(x-1)\left(\left(\sqrt[3]{3x-2}\right)^2+1\times\sqrt[3]{3x-2}+1^2\right)}=\lim_{x\to2}\frac{3x-2-1}{(x-1)\left(\left(\sqrt[3]{3x-2}\right)^2+1\times\sqrt[3]{3x-2}+1^2\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{3(x-1)}{(x-1)\left(\left(\sqrt[3]{3x-2}\right)^2+1\times\sqrt[3]{3x-2}+1^2\right)}=\lim_{x\to1}\frac{3}{\left(\sqrt[3]{3x-2}\right)^2+1\times\sqrt[3]{3x-2}+1^2}$$

$$=\frac{3}{\left(\sqrt[3]{1}\right)^2+1\times\sqrt[3]{1}+1}=\frac{3}{3}=1=f(1)$$

ومنه f دالة متصلة عند $x_0=1$:

تمرين4: (2ن+2ن+2ن) 6 pts

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $I=[0;+\infty[$

بما يلي : $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f
2. بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يجب تحديده
3. أحسب $f\left(\sqrt{3}\right)$ و $\left(f^{-1}\right)'(2)$

أجوبة: 1) $D_f=\mathbb{R}$

f دالة متصلة على المجال $I=[0;+\infty[$

2) $f'(x)=\left(\sqrt{x^2+1}\right)'=\frac{\left(x^2+1\right)'}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\geq0$

$\forall x\in[0;+\infty[$

f تزايدية قطعا على المجال $I=[0;+\infty[$

ومنه f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال:

$J=f(I)=f([0;+\infty[)=[1;+\infty[$

لأن : $f(0)=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}=\sqrt{+\infty}=+\infty$

(2 $\begin{cases} y=f^{-1}(x) \\ x\in f(I) \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} f(y)=x \\ y\in I \end{cases}$

يعني $\begin{cases} f(y)=x \\ y\in[0;+\infty[\end{cases}$ يعني $\sqrt{y^2+1}=x$ يعني $y^2+1=x^2$

يعني $y^2=x^2-1$ يعني $y=\sqrt{x^2-1}$ أو $y=-\sqrt{x^2-1}$

ونعلم أن : $y\in I=[0;+\infty[$ ومنه : $f^{-1}(x)=\sqrt{x^2-1}$

وبالتالي : $f^{-1}:[1;+\infty[\to[0;+\infty[$

$........x\to f^{-1}(x)=\sqrt{x^2-1}$

3) حساب $f\left(\sqrt{3}\right)$ و $\left(f^{-1}\right)'(2)$

$f\left(\sqrt{3}\right)=\sqrt{\sqrt{3}^2+1}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$

حسب الخاصية لدينا : $\left(f^{-1}\right)'(2)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(2)\right)}$

ونعلم أن : $f\left(\sqrt{3}\right)=2$ يعني $\sqrt{3}=f^{-1}(2)$

اذن: $\left(f^{-1}\right)'(2)=\dfrac{1}{f'\left(\sqrt{3}\right)}$

ونعلم أيضا أن : $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ اذن: $f'\left(\sqrt{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

تمرين5: 6 pts **(ن1+ن 2+ن 2+ن 1)**

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي : $f(x)=|x|\sqrt{1-x}$ وليكن (C_f) الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f
2. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار عند $x_0=1$ وأعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها.
3. أحسب $f'(x)$ لكل x من $]0;1[$
4. حدد معادلة مماس منحنى الدالة f عند النقطة التي أفصولها $x_0=0$

__الجواب :__ $f(x)=|x|\sqrt{1-x}$

الجواب: 1) $D_f=]-\infty,1]$

(2 $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x\sqrt{1-x}-0}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x\left(\sqrt{1-x}\right)^2}{(x-1)\sqrt{1-x}}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 1^-}\frac{x(1-x)}{(x-1)\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-x}{\sqrt{1-x}}=-\infty$

لأن : $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\sqrt{1-x}=0^+$ و $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}-x=-1$

ومنه f غير قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0=1$

مبيانيا نقول ان منحنى الدالة f يقبل نصف مماس يوازي محور الأراتيب في النفطة : $A(1;f(1))$ أي $A(1;0)$ وموجه نحو الأعلى

(3 حساب $f'(x)$

لدينا $f(x)=x\sqrt{1-x}$ لكل x من $]0;1[$

اذن : $f'(x)=x'\sqrt{1-x}+x\left(\sqrt{1-x}\right)'=\sqrt{1-x}+x\dfrac{(1-x)'}{2\sqrt{1-x}}$

$f'(x)=\sqrt{1-x}-\dfrac{x}{2\sqrt{1-x}}=\dfrac{2-2x-x}{2\sqrt{1-x}}=\dfrac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$

لكل x من $]0;1[$

(4 $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ و $x_0=0$

$f(0)=|0|\sqrt{1-0}=0$ و $f'(0)=1$

$y=f(0)+f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=0+1(x-0)\Leftrightarrow y=x$

« c’est en forgeant que l’on devient forgeron » dit un proverbe.
c’est en s’entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l’on devient un mathématicien