تصحيح الفرض المحروس رقم B1

تمرين 1: (2 ن)

أحسب وبسط:

$A=\sqrt[3]{125}-\left(\sqrt[5]{4}\right)^5+\sqrt{\sqrt[3]{729}}+\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}$ **الجواب :**

$$A=\sqrt[3]{125}-\left(\sqrt[5]{4}\right)^5+\sqrt{\sqrt[3]{729}}+\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{5^3}-\left(\sqrt[5]{4}\right)^5+\sqrt{\sqrt[3]{3^6}}+\sqrt[3]{\frac{54}{2}}$$

$$A=5-4+3+3=7$$

تمرين 2: (4 ن) 3 pts+1 pts

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

$\sqrt[4]{2x-4}=2$ (1 ; $x^{\frac{2}{3}}-4x^{\frac{1}{3}}+3=0$ (2 **الجواب :**

$\sqrt[4]{2x-4}=2$ (1 يعني $\left(\sqrt[4]{2x-4}\right)^4=2^4$

يعني $2x-4=16$ يعني $2x=20$ يعني $x=10$ **ومنه :**

$S=\{10\}$

$x^{\frac{2}{5}}-3x^{\frac{1}{5}}+2=0$ (2 يعني $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2-4x^{\frac{1}{3}}+3=0$

نضع $x^{\frac{1}{3}}=X$ المعادلة تصبح : $X^2-4X+3=0$

نحل المعادلة باستعمال المميز $a=1$ و $b=-4$ و $c=3$

$$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times1\times3=16-12=4>0$$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$X_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ **و** $X_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$X_1=\frac{4+2}{2\times1}=\frac{6}{2}=3$ **و** $X_2=\frac{4-2}{2\times1}=\frac{2}{2}=1$

ومنه: $x^{\frac{1}{3}}=3$ **أو** $x^{\frac{1}{3}}=1$ **يعني** $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3=3^3$ **أو** $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3=1^3$

يعني $x=3^3=27$ **أو** $x=1^3=1$

ومنه : $S=\{1;27\}$

تمرين 3: (3ن) 3 pts

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ بما يلي :

أدرس اتصال الدالة f في النقطة $x_0=1$

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{2x-1}-1}{x-1} & x\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right[-\{1\} \\ f(1)=\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

الجواب : ش غ م

نعلم أن : $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$

اذن :

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{2x-1}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt[3]{2x-1}-1\right)\left(\left(\sqrt[3]{2x-1}\right)^2+1\times\sqrt[3]{2x-1}+1^2\right)}{(x-1)\left(\left(\sqrt[3]{3x-1}\right)^2+1\times\sqrt[3]{2x-1}+1^2\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt[3]{2x-1}\right)^3-1^3}{(x-1)\left(\left(\sqrt[3]{2x-1}\right)^2+1\times\sqrt[3]{2x-1}+1^2\right)}=\lim_{x\to1}\frac{2x-1-1}{(x-1)\left(\left(\sqrt[3]{2x-1}\right)^2+1\times\sqrt[3]{2x-1}+1^2\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)}{(x-1)\left(\left(\sqrt[3]{2x-1}\right)^2+1\times\sqrt[3]{2x-1}+1^2\right)}=\lim_{x\to1}\frac{2}{\left(\sqrt[3]{2x-1}\right)^2+1\times\sqrt[3]{2x-1}+1^2}$$

$$=\frac{2}{\left(\sqrt[3]{1}\right)^2+1\times\sqrt[3]{1}+1}=\frac{2}{3}=f(1)$$

ومنه f دالة متصلة عند : $x_0=1$

تمرين 4: (2ن+2ن+2ن) 6 pts

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $I=[0;+\infty[$ بما يلي : $f(x)=\sqrt{x^2+4}$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f
2. بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يجب تحديده
3. أحسب $f\left(\sqrt{5}\right)$ و $\left(f^{-1}\right)'(3)$

أجوبة :(1 $D_f=\mathbb{R}$

f دالة متصلة على المجال $I=[0;+\infty[$

$$f'(x)=\left(\sqrt{x^2+4}\right)'=\frac{\left(x^2+4\right)'}{2\sqrt{x^2+4}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\geq0\ (2$$

$\forall x\in[0;+\infty[$

f تزايدية قطعا على المجال $I=[0;+\infty[$

ومنه f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال:

$J=f(I)=f([0;+\infty[)=[2;+\infty[$

لأن : $f(0)=2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4}=\sqrt{+\infty}=+\infty$

$$(2\ \begin{cases} y=f^{-1}(x) \\ x\in f(I) \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} f(y)=x \\ y\in I \end{cases}$$

$\begin{cases} f(y)=x \\ y\in[0;+\infty[\end{cases}$ يعني $\sqrt{y^2+4}=x$ يعني $y^2+4=x^2$

يعني $y^2=x^2-4$ يعني $y=\sqrt{x^2-4}$ أو $y=-\sqrt{x^2-4}$

ونعلم أن : $y\in I=[0;+\infty[$ ومنه : $f^{-1}(x)=\sqrt{x^2-4}$

وبالتالي : $f^{-1}:[2;+\infty[\to[0;+\infty[$

$........x\to f^{-1}(x)=\sqrt{x^2-4}$

3) حساب $f\left(\sqrt{5}\right)$ و $\left(f^{-1}\right)'(3)$

$$f\left(\sqrt{5}\right)=\sqrt{\sqrt{5}^2+4}=\sqrt{5+4}=\sqrt{9}=3$$

حسب الخاصية لدينا : $\left(f^{-1}\right)'(3)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(3)\right)}$

ونعلم أن : $f\left(\sqrt{5}\right)=3$ يعني $\sqrt{5}=f^{-1}(3)$

اذن: $\left(f^{-1}\right)'(3)=\dfrac{1}{f'\left(\sqrt{5}\right)}$

ونعلم أيضا أن : $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$ اذن: $f'\left(\sqrt{5}\right)=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

اذن: $\left(f^{-1}\right)'(3)=\dfrac{1}{\frac{\sqrt{5}}{3}}=\dfrac{3}{\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

تمرين5: 6 pts **(1ن+2ن+2ن+1ن)**

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي : $f(x)=|x|\sqrt{2-x}$ وليكن $\left(C_f\right)$ الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f
2. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار عند $x_0=2$ وأعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها.
3. أحسب $f'(x)$ لكل x من $]0;2[$
4. حدد معادلة مماس منحنى الدالة f عند النقطة التي أفصولها $x_0=1$

الجواب : $f(x)=|x|\sqrt{2-x}$

الجواب :1) $D_f=]-\infty,2]$

2) $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x\sqrt{2-x}-0}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x\left(\sqrt{2-x}\right)^2}{(x-2)\sqrt{2-x}}$

$=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x(2-x)}{(x-2)\sqrt{2-x}}=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{-x}{\sqrt{2-x}}=-\infty$

لأن : $\lim\limits_{x\to2^-}\sqrt{-x}=0^+$ و $\lim\limits_{x\to2^-}-x=-2$

ومنه f غير قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0=2$

مبيانيا نقول ان منحنى الدالة f يقبل نصف مماس يوازي محور الأراتيب في النفطة : $A(2;f(2))$ أي $A(2;0)$ وموجه نحو الأعلى

3) حساب $f'(x)$

لدينا $f(x)=x\sqrt{2-x}$ لكل x من $]0;2[$

اذن : $f'(x)=x'\sqrt{2-x}+x\left(\sqrt{2-x}\right)'=\sqrt{2-x}+x\dfrac{(2-x)'}{2\sqrt{2-x}}$

$f'(x)=\sqrt{2-x}-\dfrac{x}{2\sqrt{2-x}}=\dfrac{4-4x-x}{2\sqrt{2-x}}=\dfrac{4-5x}{2\sqrt{2-x}}$

لكل x من $]0;2[$

4) $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ و $x_0=1$

$f(1)=|1|\sqrt{2-1}=1$ و $f'(1)=-\dfrac{1}{2}$

$y=f(1)+f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y=1-\dfrac{1}{2}(x-1)\Leftrightarrow y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$

« c’est en forgeant que l’on devient forgeron » dit un proverbe.
c’est en s’entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l’on devient un mathématicien