**تمرين 1:** (0,5ن+0,5ن +1ن +1ن +1ن +2ن +1ن +1ن +2ن +1ن) 10 pts

نعتبر الدالة العددية $f$ للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة كالتالي :

$$f(x)=(x+2)\sqrt{x+2}-2$$

ليكن $(C_f)$ الممثل للدالة $f$ في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$

1)حدد $D_f$ 2)احسب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 3) أدرس الفروع اللانهائية

4)أدرس قابلية اشتقاق الدالة $f$ على اليمين عند $x_0=-2$

5)بين أن : : $\forall x\in]-2;+\infty[\quad f'(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x+2}$

6)أدرس تغيرات الدالة $f$ و حدد جدول تغيرات الدالة $f$

7)أ)بين أن الدالة $f$ تقبل دالة عكسية $f^{-1}$ معرفة على مجال $J$ يجب تحديده ب)حدد $f^{-1}(x)$ لكل $x$ من $J$

8)املأ الجدول التالي :

| $x$ | -2 | -1 | 0 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | |

وأنشئ $(C_f)$ و$(C_{f^{-1}})$ منحنى الدالة $f^{-1}$ في نفس المعلم

**أجوبة :** 1) $f(x)=(x+2)\sqrt{x+2}-2$

$x\ge-2 \Leftrightarrow x+2\ge 0$

ومنه: $D_f=[-2;+\infty[$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)\sqrt{x+2}-2=+\infty$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+2)\sqrt{x+2}-2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+2)\sqrt{x+2}}{x}-\frac{1}{x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+2)}{x}\sqrt{x+2}-\frac{1}{x}=+\infty$

لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+2}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{1}{x}=0$

التأويل المبياني: منحنى $(C)$ يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

4) $\lim\limits_{x\to-2^+}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\lim\limits_{x\to-2^+}\frac{(x+2)\sqrt{x+2}-2+2}{x+2}=\lim\limits_{x\to-2^+}\frac{(x+2)\sqrt{x+2}}{x+2}=\lim\limits_{x\to-2^+}\sqrt{x+2}=0$

ومنه $f$ قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0=-2$

مبيانيا نقول ان منحنى الدالة $f$ يقبل نصف مماس على اليمين في النفطة : $A(-2;-2)$

5)نبين أن : $\forall x\in]-2;+\infty[\quad f'(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x+2}$ ؟؟؟

$$f'(x)=\left((x+2)\sqrt{x+2}-2\right)'=(x+2)'\sqrt{x+2}+(x+2)\sqrt{x+2}'-2'$$

$$f'(x)=1\sqrt{x+2}+(x+2)\frac{(x+2)'}{2\sqrt{x+2}}-0=\frac{2x+4+x+2}{2\sqrt{x+2}}=\frac{3x+6}{2\sqrt{x+2}}$$

$$\forall x\in]-2;+\infty[\quad f'(x)=\frac{3(x+2)\sqrt{x+2}}{2\left(\sqrt{x+2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{x+2}}{2}$$

6) $f'(x)=\frac{3\sqrt{x+2}}{2}>0\ \forall x\in]-2;+\infty[$

| $x$ | $-2$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-2 \nearrow +\infty$ |

7)أ) $f$ دالة متصلة على المجال $I=[-2;+\infty[$ و $f$ تزايدية قطعا ومنه $f$ تقبل دالة عكسية $f^{-1}$ معرفة على مجال: $J=f(I)=f([-2;+\infty[)=[-2;+\infty[$

ب) $\begin{cases} y=f^{-1}(x) \\ x\in f(I)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y)=x \\ y\in I\end{cases}$

$\begin{cases} f(y)=x \\ y\in[-2;+\infty[\end{cases}$ يعني $(y+2)\sqrt{y+2}-2=x$ يعني

$(y+2)\sqrt{y+2}=x+2$

يعني $\left((y+2)\sqrt{y+2}\right)^2=(x+2)^2$ يعني $(y+2)^3=(x+2)^2$ يعني

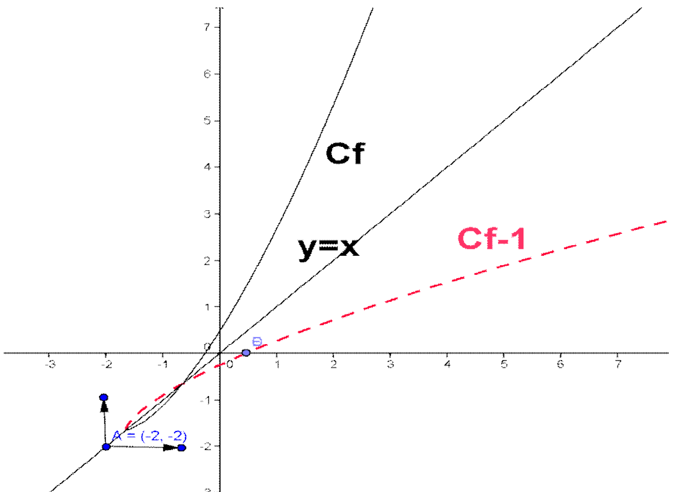
$y+2=\sqrt[3]{(x+2)^2}$

يعني $y=\sqrt[3]{(x+2)^2}-2$

ومنه : $\forall x\in]-2;+\infty[\quad f^{-1}(x)=\sqrt[3]{(x+2)^2}-2$

(8

| $x$ | -2 | -1 | 0 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | -2 | -1 | 0,8 | 6 |




**تمرين 2:** (1,5ن+1,5ن +1,5ن +1,5ن +1ن) 7pts

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)$ المعرفة كالتالي :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \begin{cases} u_{n+1}=\frac{5u_n+3}{3u_n+5} \\ u_0=2\end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية $(v_n)$ المعرفة كالتالي : $\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}$

1. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\ge 1$
2. أدرس رتابة المتتالية $(u_n)$ و ماذا تستنتج؟
3. بين أن $(v_n)$ متتالية هندسية وحدد أساسها وحدها الأول
4. أكتب $v_n$ بدلالة $n$ ثم استنتج $u_n$ بدلالة $n$

أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

**الأجوبة :**1) نستعمل برهانا بالترجع

أ)نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0=2\ge 1$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

ب)نفترض أن: $u_n\ge 1$

ج)نبين أن: $u_{n+1}\ge 1$ ؟؟؟؟؟

نحسب الفرق : $u_{n+1}-1=\frac{5u_n+3}{3u_n+5}-1=\frac{5u_n+3-(3u_n+5)}{3u_n+5}=\frac{2u_n-2}{3u_n+5}=\frac{2(u_n-1)}{3u_n+5}$

و حسب افتراض الترجع لدينا : $u_n\ge 1$

اذن : $u_n-1\ge 0$ و $3u_n+5>0$ و منه $u_{n+1}-1\ge 0$

وبالتالي: $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\ge 1$

2) دراسة رتابة المتتالية $(u_n)$ نحسب : $u_{n+1}-u_n$ وندرس الإشارة :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{5u_n+3}{3u_n+5}-u_n=\frac{5u_n+3-u_n(3u_n+5)}{3u_n+5}=\frac{-3u_n^{\ 2}+3}{3u_n+5}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{-3(u_n+1)(u_n-1)}{3u_n+5}$$

ولدينا : $u_n\ge 1$ اذن: $u_n+1\ge 0$ و $u_n-1\ge 0$ و $3u_n+5>0$

ومنه: $u_{n+1}-u_n\le 0$ وبالتالي : المتتالية $(u_n)$ تناقصية

ونستنتج أنها متقاربة لأن المتتالية $(u_n)$ تناقصية و مكبورة

3) $$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1}=\frac{\frac{5u_n+3}{3u_n+5}-1}{\frac{5u_n+3}{3u_n+5}+1}=\frac{\frac{5u_n+3-(3u_n+5)}{3u_n+5}}{\frac{5u_n+3+(3u_n+5)}{3u_n+5}}=\frac{\frac{2u_n-2}{3u_n+5}}{\frac{8u_n+8}{3u_n+5}}=\frac{2u_n-2}{8u_n+8}$$

$$v_{n+1}=\frac{2(u_n-1)}{8(u_n+1)}=\frac{2}{8}\frac{u_n-1}{u_n+1}=\frac{1}{4}v_n$$

اذن: المتتالية $(v_n)$ هندسية أساسها $q=\frac{1}{4}$

وحدها الأول $v_0=\frac{u_0-1}{u_0+1}=\frac{2-1}{2+1}=\frac{1}{3}$

4) بما أن المتتالية $(v_n)$ هندسية أساسها $q=\frac{1}{4}$ وحدها الأول $v_0=\frac{1}{3}$

فان: $v_n=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$ استنتاج $u_n$ بدلالة $n$:

لدينا: $v_nu_n+v_n-u_n=-1\Leftrightarrow v_n(u_n+1)=u_n-1\Leftrightarrow v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}$

$$u_n=\frac{1+v_n}{1-v_n}\Leftrightarrow u_n=\frac{-1-v_n}{v_n-1}\Leftrightarrow u_n(v_n-1)=-1-v_n\Leftrightarrow$$

ونعلم أن : $v_n=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$ اذن : $u_n=\frac{1+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n}$

5) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$ لأن : $-1<\frac{2}{5}<1$ اذن :

$\lim_{x\to+\infty}v_n=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$ و $\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n}=\frac{1+0}{1-0}=1$

| تمرين:4 | 3 pts **(1ن+2 ن)** |
|---|---|

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كالتالي: $f(x)=\frac{x}{(x^2+4)^2}$

1. حدد مجموعة الدوال الأصلية للدالة $f$
2. حدد الدالة الأصلية $F$ للدالة $f$ بحيث $F(0)=1$

**الجواب :**

1) $f(x)=\frac{x}{(x^2+4)^2}$ يعني $f(x)=\frac{1}{2}\frac{(x^2+4)'}{(x^2+4)^2}$

ومنه : $F(x)=-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+4}+k$ $k\in\mathbb{R}$

3) $F(0)=1$ يعني $-\frac{1}{8}+k=1$ يعني $k=1+\frac{1}{8}$ يعني $k=\frac{9}{8}$

ومنه : $F(x)=-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+4}+\frac{9}{8}$

**« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.**
**c'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien**