تصحيح الفرض المحروس رقم 2 B

تمرين 1:	(1ن+ 1ن+ 2ن+ 1ن+ 1ن+ 0,5ن+0,5ن) (2ن+ 1ن)	10 pts

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي :

$f(x)=(x+1)\sqrt{x+1}-1$

ليكن (C_f) الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$

1)حدد D_f 2)احسب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 3) أدرس الفروع اللانهائية

4)أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين عند $x_0=-1$

5)بين أن : $\forall x\in]-1;+\infty[\ \ f'(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x+1}$

6)أدرس تغيرات الدالة f و حدد جدول تغيرات الدالة f

7)أ)بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال J يجب تحديده ب)حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J

8)املأ الجدول التالي :

x	-1	0	1	3
$f(x)$				

وأنشئ (C_f) و$(C_{f^{-1}})$ منحنى الدالةf^{-1} في نفس المعلم

أجوبة : 1) $f(x)=(x+1)\sqrt{x+1}-1$

$x\geq -1 \Leftrightarrow x+1\geq 0$ ومنه: $D_f=[-1;+\infty[$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\sqrt{x+1}-1=+\infty$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+1)\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+1)\sqrt{x+1}}{x}-\frac{1}{x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+1)}{x}\sqrt{x+1}-\frac{1}{x}=+\infty$

لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{1}{x}=0$

التأويل المبياني: منحنى (C) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

4) $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{(x+1)\sqrt{x+1}-1+1}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{(x+1)\sqrt{x+1}}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1^+}\sqrt{x+1}=0$

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0=-1$

مبيانيا نقول ان منحنى الدالة f يقبل نصف مماس على اليمين في النفطة : $A(-1;-1)$

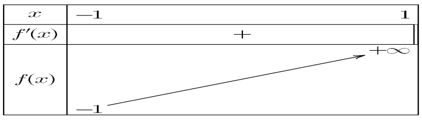
5)نبين أن : $\forall x\in]-1;+\infty[\ \ f'(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x+1}$ ؟؟؟

$f'(x)=\left((x+1)\sqrt{x+1}-1\right)'=(x+1)'\sqrt{x+1}+(x+1)\sqrt{x+1}'-1'$

$f'(x)=1\sqrt{x+1}+(x+1)\frac{(x+1)'}{2\sqrt{x+1}}-0=\frac{2x+2+x+1}{2\sqrt{x+1}}=\frac{3x+3}{2\sqrt{x+1}}$

$\forall x\in]-1;+\infty[\ \ f'(x)=\frac{3(x+1)\sqrt{x+1}}{2\left(\sqrt{x+1}\right)^2}=\frac{3\sqrt{x+1}}{2}$

6) $f'(x)=\frac{3\sqrt{x+1}}{2}>0\ \forall x\in]-1;+\infty[$



7)أ) f دالة متصلة على المجال $I=]-\infty;1]$ و f تزايدية قطعا ومنه f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال: $J=f(I)=f(]-1;+\infty[)=]-1;+\infty[$

ب) $\begin{cases} y=f^{-1}(x)\\ x\in f(I)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} f(y)=x\\ y\in I\end{cases}$

$\begin{cases} f(y)=x\\ y\in]-1;+\infty[\end{cases}$ يعني $(y+1)\sqrt{y+1}-1=x$ يعني

$(y+1)\sqrt{y+1}=x+1$

يعني $\left((y+1)\sqrt{y+1}\right)^2=(x+1)^2$ يعني $(y+1)^3=(x+1)^2$ يعني

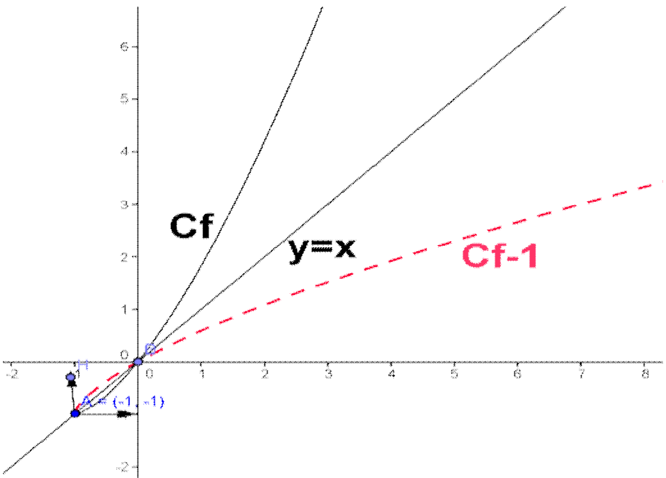
$y+1=\sqrt[3]{(x+1)^2}$

يعني $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}-1$ ومنه :

$\forall x\in]-1;+\infty[\ \ f^{-1}(x)=\sqrt[3]{(x+1)^2}-1$

8)

x	-1	0	1	3
$f(x)$	-1	0	1 ,8	7



تمرين 2:	(1ن+ 1,5ن+ 1,5ن+ 1,5ن+1,5ن)	7pts

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n\in\mathbb{N}\ \begin{cases} u_{n+1}=\frac{4u_n+3}{3u_n+4}\\ u_0=3\end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $\forall n\in\mathbb{N}\ \ v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}$

1. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\geq 1$
2. أدرس رتابة المتتالية (u_n) و ماذا تستنتج؟
3. بين أن (v_n) متتالية هندسية وحدد أساسها وحدها الأول
4. أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

الأجوبة : 1) نستعمل برهانا بالترجع

أ)نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0 = 3 \ge 1$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

ب)نفترض أن: $u_n \ge 1$

ج)نبين أن: $u_{n+1} \ge 1$ ؟؟؟؟؟

نحسب الفرق : $u_{n+1}-1=\frac{4u_n+3}{3u_n+4}-1=\frac{4u_n+3-(3u_n+4)}{3u_n+4}=\frac{u_n-1}{3u_n+4}$

و حسب افتراض الترجع لدينا : $u_n \ge 1$

اذن : $u_n-1\ge 0$ و $3u_n+4>0$ و منه $u_{n+1}-1\ge 0$

وبالتالي: $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\ge 1$

2) دراسة رتابة المتتالية (u_n) نحسب : $u_{n+1}-u_n$ وندرس الإشارة :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{4u_n+3}{3u_n+4}-u_n=\frac{4u_n+3-u_n(3u_n+4)}{3u_n+4}=\frac{-3u_n^2+3}{3u_n+4}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{-3(u_n+1)(u_n-1)}{3u_n+4}$$

ولدينا : $u_n\ge 1$ اذن: $u_n+1\ge 0$ و $u_n-1\ge 0$ و $3u_n+4>0$

ومنه: $u_{n+1}-u_n\le 0$ وبالتالي : المتتالية (u_n) تناقصية

ونستنتج أنها متقاربة لأن المتتالية (u_n) تناقصية ومصغورة بالعدد 1

3)
$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1}=\frac{\frac{4u_n+3}{3u_n+4}-1}{\frac{4u_n+3}{3u_n+4}+1}=\frac{\frac{4u_n+3-(3u_n+4)}{3u_n+4}}{\frac{4u_n+3+(3u_n+4)}{3u_n+4}}=\frac{\frac{u_n-1}{3u_n+4}}{\frac{7u_n+7}{3u_n+4}}=\frac{u_n-1}{7u_n+7}$$

$$v_{n+1}=\frac{1(u_n-1)}{7(u_n+1)}=\frac{1}{7}v_n$$

اذن: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{7}$

وحدها الأول $v_0=\frac{u_0-1}{u_0+1}=\frac{3-1}{3+1}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

4) بما أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{7}$ وحدها الأول $v_0=\frac{1}{2}$ فان: $v_n=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{7}\right)^n$

استنتاج u_n بدلالة n :

لدينا: $v_nu_n+v_n-u_n=-1 \Leftrightarrow v_n(u_n+1)=u_n-1 \Leftrightarrow v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}$

$$u_n=\frac{1+v_n}{1-v_n} \Leftrightarrow u_n=\frac{-1-v_n}{v_n-1} \Leftrightarrow u_n(v_n-1)=-1-v_n \Leftrightarrow$$

ونعلم أن : $v_n=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$ اذن : $u_n=\frac{1+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{7}\right)^n}{1-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{7}\right)^n}$

5) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^n=0$ لأن : $-1<\frac{1}{7}<1$ اذن :

$\lim_{x\to+\infty}v_n=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{7}\right)^n=0$ و $\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{7}\right)^n}{1-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{7}\right)^n}=\frac{1+0}{1-0}=1$

تمرين4:	3 pts (1ن+2ن)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كالتالي: $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}$

1. حدد مجموعة الدوال الأصلية للدالة f
2. حدد الدالة الأصلية F للدالة f بحيث $F(0)=1$

الجواب :

1) $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}$ يعني $f(x)=2\frac{(x^2+4)'}{2\sqrt{x^2+4}}$

ومنه : $F(x)=2\sqrt{x^2+4}+k$ $k\in\mathbb{R}$

2) $F(0)=1$ يعني $4+k=1$ يعني $k=1-4$ يعني $k=-3$

ومنه : $F(x)=2\sqrt{x^2+4}-3$

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.
c'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien