تمرين 1: (ن1 +ن1 +ن2 +ن2) 6 pts

حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $2z+i\overline{z}=4-i$

الجواب:

$z\in\mathbb{C}$ **يعني** $\exists x\in\mathbb{R}$ **و** $\exists y\in\mathbb{R}$ **بحيث :** $z=x+yi$

$2(x+yi)+i(x-yi)=4-i \Leftrightarrow 2z+i\overline{z}=4-i$

$\Leftrightarrow (2x+y)+i(2y+x)=4-i \Leftrightarrow \begin{cases}2x+y=4\\2y+x=-1\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2x+y=4\\-4y-2x=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+y=4\\-4y-2x+2x+y=2+4\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2x+y=5\\-3y=6 \Leftrightarrow y=-\frac{6}{3} \Leftrightarrow y=-2\end{cases}$ وبتعويض y بقيمتها في

المعادلة 1 نجد : $x=\frac{7}{2}$ ومنه: $S=\left\{\frac{7}{2}-2i\right\}$

تمرين 2: (ن3 +ن1 +ن2 +ن2) 8pts

ليكن العددين العقديين : $z_1=1-i$ و $z_2=\sqrt{3}+3i$

1. أكتب العقديين z_1 و z_2 على شكلهم المثلثي
2. أكتب : $z=z_1\times z_2$ على الشكل الجبري
3. أكتب : $z=z_1\times z_2$ على الشكل المثلثي
4. استعمل النتائج السابقة لحساب : $\sin\frac{\pi}{12}$ و $\cos\frac{\pi}{12}$

أجوبة :1) لدينا: $|z_1|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

$z_1=1-i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

ونستعمل : القاعدة التالية : $\cos(-x)=\cos x$ و $\sin(-x)=-\sin x$

اذن : $z_1=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$z_2=\sqrt{3}+3i$

لدينا: $|z_2|=\sqrt{\sqrt{3}^2+3^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$\sqrt{3}+3i=2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

اذن : $z_2=2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$Z=z_1\times z_2=2\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right)=2\sqrt{6}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$

(2 $Z=(\sqrt{3}+3i)(1-i)=\sqrt{3}-\sqrt{3}i+3i+3=(\sqrt{3}+3)+i(3-\sqrt{3})$

(3 $Z=(\sqrt{3}+3)+i(3-\sqrt{3})=2\sqrt{6}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$

اذن : $\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}+3}{2\sqrt{6}}\\\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}\end{cases}$ اذن : $\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\\\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\end{cases}$ يعني $\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\\\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{cases}$

تمرين 3: ن2 2 pts

تحديد (E) مجموعة النقط M التي لحقها. z بحيث:

$|z+4i|=2$

الجواب :طريقة 1:(طريقة تحليلية)

$z\in\mathbb{C}$ يعني $\exists x\in\mathbb{R}$ و $\exists y\in\mathbb{R}$ بحيث : $z=x+yi$

$|z+4i|=2$ يعني $|x+yi+4i|=2$ يعني $|x+i(y+4)|=2$

يعني $\sqrt{x^2+(y+4)^2}=2$ يعني $(x-0)^2+(y+4)^2=2^2$

اذن مجموعة النقط هي الدائرة (C) الذي مركزها : $\Omega(0;-4)$ وشعاعها $R=2$

طريقة2:(طريقة هندسية)

$|z+4i|=2$ نضع : $A(z_A=-4i)$

اذن: $|z_M-z_A|=2$ يعني $AM=2$

اذن مجموعة النقط هي الدائرة (C) الذي مركزها : A وشعاعها $R=2$

تمرين 4: (ن1.5+ن1.5) 3pts

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التالية:

$$\ln^2(x-1)-\ln(x-1)-2=0$$

2) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة التالية:

$$\log_{\frac{1}{3}}(x+1)-\log_{\frac{1}{3}}(-x+2)\leq 0$$

أجوبة : 1) $\ln^2(x-1)-\ln(x-1)-2=0$

هذه المعادلة معرفة إذا وفقط إذا كان: $x-1>0$ يعني $x>1$

نضع : $\ln(x-1)=X$ والمعادلة تصبح: $X^2-X-2=0$

$\Delta=b^2-4ac=1+8=9>0$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$X_1=\frac{1+3}{2\times1}$ و $X_2=\frac{1-3}{2\times1}$ يعني $X_1=2$ و $X_2=-1$

يعني $\ln(x_1-1)=2$ و $\ln(x_2-1)=-1$ يعني $x_1-1=e^2$ و $x_2-1=e^{-1}$

يعني $x_{1e}=e^2+1$ و $x_2=\frac{1}{e}+1$ ومنه : $S=\left\{e^2+1,\frac{1}{e}+1\right\}$

(2 $\log_{\frac{1}{3}}(x+1)-\log_{\frac{1}{3}}(-x+2)\leq 0$

المتراجحة معرفة يعني إذا كان:

$x+1>0$ و $-x+2>0$ يعني $x>-1$ و $x<2$

اذن : $D_I=]-1;2[$

$\log_{\frac{1}{3}}(x+1)-\log_{\frac{1}{3}}(-x+2)\leq 0$ يعني

$\log_{\frac{1}{3}}(x+1)\leq\log_{\frac{1}{3}}(-x+2)$ يعني $x+1\geq -x+2$ عني $x\geq\frac{1}{2}$

ومنه : إذن: $S=]-1;2[\cap\left[\frac{1}{2};+\infty\right[=\left[\frac{1}{2};2\right[$

تمرين:5 3 pts (1ن+ 1ن+ 1ن)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$

بما يلي: $f(x)=\dfrac{2x-5}{x-1}$

1.حدد الأعداد الحقيقية a و b بحيث:

$$\forall x\in]1;+\infty[\ ; f(x)=a+\frac{b}{x-1}$$

2.استنتج الدوال الأصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$

حدد الدالة الأصلية F للدالة f بحيث $F(2)=0$

أجوبة :

(1 $a+\dfrac{b}{x-1}=\dfrac{a(x-1)+b}{x-1}=\dfrac{ax-a+b}{x-1}$

بالمقارنة مع الكتابة : $f(x)=\dfrac{2x-5}{x-1}$ نجد أن :

$\begin{cases} a=2 \\ -a+b=-5 \end{cases}$ نجد اذن : $a=2$ يعني $b=-3$

ومنه الكتابة الجديدة لصيغة الدالة f هي : $\left(\forall x\in]1;+\infty[\right); f(x)=2-\dfrac{3}{x-1}$

(2 $\left(\forall x\in]2+\infty[\right); f(x)=2-3\dfrac{(x-1)'}{x-1}$

ومنه : $F(x)=2x-3\ln|x-1|+k$ مع $k\in\mathbb{R}$

وبما أن : $x\in]1+\infty[$ يعني $x>1$

ومنه : $x-1>0$ وبالتالي : مجموعة الدوال الأصلية هي:

$F(x)=2x-3\ln(x-1)+k$ مع $k\in\mathbb{R}$

(3 $F(2)=0$ يعني $4-3\ln(1)+k=0$ يعني $k=-4$

ومنه : $F(x)=2x-3\ln(x-1)-4$