## تمرين 1: 6 pts (1ن+ 1ن+ 2ن+ 2ن)

حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $2iz+\bar{z}=7-i$

**الجواب:**

$z\in\mathbb{C}$ يعني $\exists x\in\mathbb{R}$ و $\exists y\in\mathbb{R}$ بحيث : $z=x+yi$

$2i(x+yi)+x-yi=7-i \Leftrightarrow 2iz+\bar{z}=7-i$

$\Leftrightarrow (x-2y)+i(2x-y)=7-i \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=7 \\ 2x-y=-1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=7 \\ -4x+2y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=7 \\ -4x+2y+x-2y=2+7 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=7 \\ -3x=9 \Leftrightarrow x=-3 \end{cases}$

وبتعويض $x$ بقيمتها في المعادلة 1 نجد : $y=-5$

ومنه: $S=\{-3-5i\}$

## تمرين 2: 8pts (3ن+ 1ن+ 2ن+ 2ن)

ليكن العددين العقديين : $z_1=1+i$ و $z_2=\sqrt{3}-i$ و

$Z=z_1\times z_2$

1. أكتب العقديين $z_1$ و $z_2$ على شكلهم المثلثي
2. أكتب : $z=z_1\times z_2$ على الشكل الجبري
3. أكتب : $z=z_1\times z_2$ على الشكل المثلثي
4. استعمل النتائج السابقة لحساب : $\sin\frac{\pi}{12}$ و $\cos\frac{\pi}{12}$

**الأجوبة: 1)** $z_1=1+i$

لدينا: $|z_1|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$z_1=1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

اذن : $z_1=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$z_2=\sqrt{3}-i$

لدينا: $|z_2|=\sqrt{\sqrt{3}^2+(-1)^2}=\sqrt{4}=2$

$\sqrt{3}-i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

ونستعمل : القاعدة التالية : $\cos(-x)=\cos x$ و $\sin(-x)=-\sin x$

اذن : $z_2=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$Z=z_1\times z_2=2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$

2) $Z=\left(\sqrt{3}-i\right)(1+i)=\sqrt{3}+\sqrt{3}i-i+1=\left(\sqrt{3}+1\right)+i\left(\sqrt{3}-1\right)$

3) $Z=\left(\sqrt{3}+1\right)+i\left(\sqrt{3}-1\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$

اذن : $\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$ يعني $\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$

## تمرين 3: 2 pts 2ن

تحديد $(E)$ مجموعة النقط $M$ التي لحقها $z$ بحيث:

$|z+3i|=4$

**الجواب: طريقة 1:**(طريقة تحليلية)

$z\in\mathbb{C}$ يعني $\exists x\in\mathbb{R}$ و $\exists y\in\mathbb{R}$ بحيث : $z=x+yi$

$|z+3i|=4$ يعني $|x+yi+3i|=4$ يعني $|x+i(y+3)|=4$

يعني $\sqrt{x^2+(y+3)^2}=4$ يعني $(x-0)^2+(y+3)^2=4^2$

اذن مجموعة النقط هي الدائرة $(C)$ الذي مركزها : $\Omega(0;-3)$ وشعاعها $R=4$

**طريقة2:**(طريقة هندسية)

$|z+3i|=4$ نضع : $A(z_A=-3i)$

اذن: $|z_M-z_A|=4$ يعني $AM=4$

اذن مجموعة النقط هي الدائرة $(C)$ الذي مركزها : $A$ وشعاعها $R=4$

## تمرين 4: 3pts (1.5ن+1.5ن)

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التالية:

$$\ln^2(x-2)-2\ln(x-2)-3=0$$

2) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة التالية:

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+2)-\log_{\frac{1}{2}}(-x+1)\geq 0$$

**أجوبة : 1)** $\ln^2(x-2)-2\ln(x-2)-3=0$

هذه المعادلة معرفة إذا وفقط إذا كان: $x-2>0$ يعني $x>2$

**نضع :** $\ln(x-2)=X$ والمعادلة تصبح: $X^2-2X-3=0$

$\Delta=b^2-4ac=4+12=16>0$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$X_1=\frac{2+4}{2\times1}$ و $X_2=\frac{2-4}{2\times1}$ يعني $X_1=3$ و $X_2=-1$

يعني $\ln(x_1-2)=3$ و $\ln(x_2-2)=-1$ يعني $x_1-2=e^3$ و $x_2-2=e^{-1}$

يعني $x_1=e^3+2$ و $x_2=\frac{1}{e}+2$ ومنه : $S=\left\{e^3+2,\frac{1}{e}+2\right\}$

**2)** $\log_{\frac{1}{2}}(x+2)-\log_{\frac{1}{2}}(-x+1)\geq 0$

المتراجحة معرفة يعني إذا كان:

$x+2>0$ و $-x+1>0$ يعني $x>-2$ و $x<1$

اذن : $D_I=]-2;1[$

$\log_{\frac{1}{2}}(x+2)-\log_{\frac{1}{2}}(-x+1)\geq 0$ يعني

$\log_{\frac{1}{2}}(x+2)\geq\log_{\frac{1}{2}}(-x+1)$ يعني $x+2\leq -x+1$

يعني $x\leq -\frac{1}{2}$ ومنه : إذن: $S=]-2;1[\cap\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]=\left]-2;-\frac{1}{2}\right]$

| 3 pts (1ن+ 1ن+ 1ن) | تمرين:5 |
|---|---|

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على المجال $]2;+\infty[$

بما يلي: $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$

1.حدد الأعداد الحقيقية $a$ و $b$ بحيث:

$$\forall x\in ]1;+\infty[\ ; f(x)=a+\frac{b}{x-2}$$

2.استنتج الدوال الأصلية للدالة $f$ على المجال $]2;+\infty[$

حدد الدالة الأصلية $F$ للدالة $f$ بحيث $F(3)=0$

**<u>أجوبة :</u>**

1) $a+\dfrac{b}{x-2}=\dfrac{a(x-2)+b}{x-2}=\dfrac{ax-2a+b}{x-2}$

بالمقارنة مع الكتابة : $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$ نجد أن :

$\begin{cases} a=1 \\ -2a+b=1 \end{cases}$ نجد اذن : $a=1$ يعني $b=3$

ومنه الكتابة الجديدة لصيغة الدالة $f$ هي : $(\forall x\in ]2+\infty[) ; f(x)=1+\dfrac{3}{x-2}$

2) $(\forall x\in ]2+\infty[) ; f(x)=1+3\dfrac{(x-2)'}{x-2}$

ومنه : $F(x)=x+3\ln|x-2|+k$ مع $k\in\mathbb{R}$

وبما أن : $x\in ]2+\infty[$ يعني $x>2$

ومنه : $x-2>0$ وبالتالي : مجموعة الدوال الأصلية هي:

$F(x)=x+3\ln(x-2)+k$ مع $k\in\mathbb{R}$

3) $F(3)=0$ يعني $3+3\ln(1)+k=0$ يعني $k=-3$

ومنه : $F(x)=x+3\ln(x-2)-3$