ملخص درس المرجح

I. مرجح نقطتين متزنتين

1.1. نقطة متزنة

لتكن A نقطة من المستوى و a عددا حقيقيا

الزوج $(A;a)$ يسمى نقطة متزنة و العدد a يسمى وزن النقطة A

(نقول كذلك أن النقطة A معينة بالمعامل a).

1.2. خاصية و تعريف

لتكن $(A;a)$ و $(B;b)$ نقطتين متزنتين من المستوى بحيث $a+b\neq 0$

توجد نقطة وحيدة G من المستوى بحيث : $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

النقطة G تسمى مرجح النقطتين المتزنتين $(A;a)$ و $(B;b)$

ملاحظة1: اذا كانت $a+b=0$ فان النقطتين المتزنتين $(A;a)$ و $(B;b)$ ليس لهم مرجح

ملاحظة2: اذا كانت النقطة G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;a)$ و $(B;b)$

فان : $\overrightarrow{AG}=\dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$ ① وهذه الكتابة تستعمل لرسم النقطة G

تمرين1:

1. أنشئ G مرجح النقطتين $(A;-2)$ و $(B;3)$ ثم أنشئ G' مرجح النقطتين $(A;2)$ و $(B;1)$

2. أحسب $\overrightarrow{GG'}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$

الأجوبة: 1)لدينا G مرجح النقطتين $(A;-2)$ و $(B;3)$ باستعمال العلاقة ① نجد :

$\overrightarrow{AG}=\dfrac{3}{(-2)+3}\overrightarrow{AB}$ يعني $\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AB}$ ②

ولدينا G' مرجح النقطتين $(A;2)$ و $(B;1)$ وباستعمال العلاقة ① نجد $\overrightarrow{AG'}=\dfrac{1}{1+2}\overrightarrow{AB}$: يعني $\overrightarrow{AG'}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ ③

2)اذن : $\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AG'}=-\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AG'}=-3\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\left(-3+\dfrac{1}{3}\right)\overrightarrow{AB}=-\dfrac{8}{3}\overrightarrow{AB}$

II. خاصيات مرجح نقطتين متزنتين

أ) الصمود

مرجح نقطتين متزنتين لا يتغير بضرب معامليهما في عدد حقيقي غير منعدم:يعني:إذا كان G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;a)$ و $(B;b)$

فان لكل k من $\mathbb{R}^*$ فان : G هو كذلك مرجح النقطتين المتزنتين $(A;ka)$ و $(B;kb)$

ب) الخاصية المميزة

لتكن $(A;a)$ و $(B;b)$ نقطتين متزنتين من المستوى بحيث $a+b\neq 0$

ولتكن G نقطة من المستوى

G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;a)$ و $(B;b)$ إذا وفقط إذا لكل نقطة M من المستوى : $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}=(a+b)\overrightarrow{MG}$

البرهان : لتكن M نقطة من المستوى $(A;a)$

استنتاج : بوضع : $M=A$ (على التوالي $M=B$) في الخاصية المميزة نحصل على : $\overrightarrow{AG}=\dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$

(على التوالي $\overrightarrow{BG}=\dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{BA}$) وهذه الكتابات تمكننا من رسم النقطة G وتبين لنا أن : A و B و G نقط مستقيمية.

III. إحداثيتي المرجح:

المستوى منسوب إلى معلم $(o,\vec{i},\vec{j})$ و لتكن $(A;a)$ و $(B;b)$ نقطتين متزنتين من المستوى

إذا كان G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;a)$ و $(B;b)$ فان إحداثيتي G هما : $\begin{cases} x_G=\dfrac{ax_A+bx_B}{a+b} \\ y_G=\dfrac{ay_A+by_B}{a+b} \end{cases}$

ملاحظة : I منتصف القطعة $[AB]$ يعني I مرجح النقطتين المتزنتين $(A;1)$ و $(B;1)$

مثال: نعتبر النقطتين : $A(1;2)$ و $B(-4;6)$ و ليكن G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;2)$ و $(B;-1)$

أحسب إحداثيتي G

الجواب: $\begin{cases} x_G = \dfrac{2\times1+(-1)\times(-4)}{2+(-1)} = \dfrac{6}{1} = 6 \\ y_G = \dfrac{2\times2+(-1)\times6}{2+(-1)} = \dfrac{-2}{1} = -2 \end{cases}$ اذن : $G(6;-2)$

IV. مرجح ثلاث نقط متزنة:

خاصية و تعريف: لتكن $(A;a)$ و $(B;b)$ و $(C;c)$ ثلاث نقط متزنة من المستوى بحيث $a+b+c\neq0$

توجد نقطة وحيدة G من المستوى بحيث : $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

النقطة G تسمى مرجح النقط المتزنة $(A;a)$ و $(B;b)$ و $(C;c)$

حالة خاصة : إذا كان : $a=b=c$ فان مرجح النقط المتزنة $(A;a)$ و $(B;b)$ و $(C;c)$ يسمى كذلك مركز ثقل المثلث ABC

V. خاصيات مرجح ثلاث نقط متزنة

أ) **الصمود:** إذا كان G مرجح النقط المتزنة $(A;a)$ و $(B;b)$ و $(C;c)$ فان لكل k من $\mathbb{R}^*$ G هي كذلك مرجح النقط المتزنة :

$(A;ka)$ و $(B;kb)$ و $(C;kc)$

ب) **الخاصية المميزة:** لتكن $(A;a)$ و $(B;b)$ و $(C;c)$ ثلاث نقط من المستوى بحيث $a+b+c\neq0$ ولتكن G نقطة من المستوى

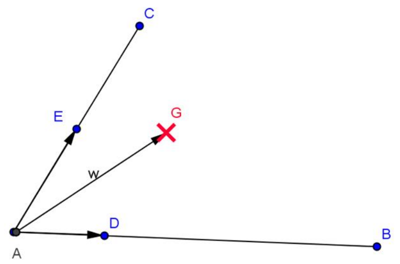
G مرجح النقط المتزنة $(A;a)$ و $(B;b)$ و $(C;c)$ إذاوفقط إذا لكل نقطة M من المستوى : $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}=(a+b+c)\overrightarrow{MG}$

استنتاج : بوضع : $M=A$ في الخاصية المميزة نحصل على : $\overrightarrow{AG}=\dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$ ® وهذه العلاقة تمكننا من رسم النقطة G

مثال: ليكن ABC مثلثا و G نقطة بحيث : $2\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{GB}$

بين أن : G مرجح النقط المتزنة $(A;1)$ و $(B;1)$ و $(C;2)$

و أنشئ النقطة G



الجواب: $2\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{GB}$ يعني $2\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

يعني $2(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC})-3\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ يعني $-\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ يعني $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

ومنه : G مرجح النقط المتزنة $(A;1)$ و $(B;1)$ و $(C;2)$

وحسب العلاقة ® فان : $\overrightarrow{AG}=\dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$

أي : $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{4}\overrightarrow{AC}$ يعني $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ ومنه رسم G

ج) **تجميعية المرجح:**

تكن $(A;a)$ و $(B;b)$ و $(C;c)$ ثلاث نقط من المستوى بحيث $a+b+c\neq0$ و $a+b\neq0$

إذا كان G مرجح النقط المتزنة $(A;a)$ و $(B;b)$ و $(C;c)$ وكانت H مرجح النقطتين المتزنتين $(A;a)$ و $(B;b)$

فان G مرجح $(H;a+b)$ و $(C;c)$

مثال: ليكن G مركز ثقل المثلث ABC و I منتصف القطعة $[BC]$ بين أن G مرجح النقطتين $(A;1)$ و $(I;2)$

الجواب : G مركز ثقل المثلث ABC يعني G مرجح النقط المتزنة $(A;1)$ و $(B;1)$ و $(C;1)$

I منتصف القطعة $[BC]$ يعني : I مرجح النقطتين $(B;1)$ و $(C;1)$

وحسب خاصية تجميعية المرجح فان : G هو مرجح النقطتين : $(A;1)$ و $(I;1+1)$

VI. إحداثيتا مرجح ثلاث نقط

إذا كان G مرجح النقط المتزنة $(A;a)$ و $(B;b)$ و $(C;c)$ فان إحداثيتي G هما : $\begin{cases} x_G = \dfrac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c} \\ y_G = \dfrac{ay_A+by_B+cy_C}{a+b+c} \end{cases}$