

المتاليات

()

n

I- عموميات حول المتاليات

1- تعاريف و مصطلحات

a / أنشطة

1/ لاحظ ثم أتمم خمسة أعداد مائة لتسلسل كل لائحة من اللوائح التالية:

a- 1, 3, 5, 7, 9, 11,

b- 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$,

c- -3, $-\frac{3}{2}$, $-\frac{3}{4}$, $-\frac{3}{8}$, $-\frac{3}{16}$, $-\frac{3}{32}$,

d- $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{7}$,

e- -2, 3, 1, 4, 5, 9,

- كل لائحة من اللوائح تسمى متتالية و الأعداد المكونة لكل لائحة تسمى حدود المتتالية
- نلاحظ أن لوائح أعلاه تسير بانتظام معين

اللائحة a هي الأعداد الفردية في ترتيب تصاعدي

اللائحة b هي أعداد على شكل $\frac{1}{n}$ بتعويض n بعدد صحيح طبيعي غير منعدم

اللائحة c هي أعداد على شكل $\frac{-3}{2^n}$ بتعويض n بعدد صحيح طبيعي

اللائحة d هي أعداد على شكل $\frac{n}{n+1}$ بتعويض n بعدد صحيح طبيعي غير منعدم

اللائحة e هي أعداد حصلنا فيها على الحد الثالث بمجموع الحدين اللذين قبله و الحد الرابع بمجموع الحدين اللذين قبله وهكذا.....

2/ في كل لائحة من اللوائح a و b و c إذا رمزنا لأول عدد من اللائحة بـ u_0 و الثاني بـ u_1 و الثالث بـ u_2

و هكذا دواليك فإننا نحصل على اللائحة $u_0, u_1, u_2, u_3, \dots$

أ/ ما رتبة u_8 ب/ حدد قيمة u_8

ج/ ما رتبة u_n ، حدد u_n

- $u_0, u_1, u_2, u_3, \dots$ تسمى حدود متتالية

- إذا كان الحد الأول هو u_0 فإن رتبة u_0 هي 1 و رتبة u_1 هي 2 وهكذا..... رتبة u_n هي $n+1$

ج- /a $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2n+1$ /b $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{1}{n+1}$ /c $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{-3}{2^n}$

u_n يسمى الحد العام للمتتالية

3/ في اللائحة d إذا رمزنا لأول عدد من اللائحة بـ v_1 و الثاني بـ v_2 و الثالث بـ v_3

و هكذا دواليك فإننا نحصل على اللائحة v_1, v_2, v_3, \dots

ما رتبة v_n ، حدد v_n

رتبة v_n هي n و $v_n = \frac{n}{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

4/ حد صيغة التي تسير عليها اللائحة e

لاحظنا أن في اللائحة e أعداد حصلنا فيها على الحد الثالث بمجموع الحدين اللذين قبله و الحد الرابع بمجموع الحد اللذين قبلهما وهكذا.....
إذا اعتبرنا أن w_1 ، w_2 ، w_3 ، حدود متتالية الأثحة e فان $w_3 = w_1 + w_2$ و $w_4 = w_2 + w_3$...
حيث $w_{n+2} = w_{n+1} + w_n$ $n \in \mathbb{N}^*$

ملاحظة:

المتتاليات في a و b و c و d أعطينا حدها العام بصيغة صريحة أي لحساب أي حد نعوض n و نحصل على النتيجة أم في e أعطينا حدها العام بدلالة حدود للمتتالية أي لحساب حد يجب أن نرجع إلى حدين قبلهما

/b تعريف

ليكن n_0 عددا صحيحا طبيعيا و $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$ جزء من \mathbb{N}
كل دالة من I نحو \mathbb{R} تسمى متتالية عددية

اصطلاحات

$u: I \rightarrow \mathbb{R}$ متتالية عددية

يرمز لصورة n بواسطة u_n عوض $u(n)$. العدد u_n يسمى حد المتتالية ذا المدل n ويسمى أيضا الحد العام.

يرمز للمتتالية بـ $(u_n)_{n \in I}$ عوض u.

*- إذا كان $I = \mathbb{N}$ فإنه يرمز للمتتالية بـ $(u_n)_{n \geq 0}$ أو (u_n)

- إذا كان $I = \mathbb{N}^$ فإنه يرمز للمتتالية بـ $(u_n)_{n \geq 1}$

*- إذا كان $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$ فإنه يرمز للمتتالية أيضا بـ $(u_n)_{n \geq n_0}$

أمثلة

نعتبر المتتاليات العددية (u_n) و $(v_n)_{n \geq 2}$ و $(w_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بـ :

$$\begin{cases} w_1 = -2 \\ w_{n+1} = 2w_n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} v_n = 2n^2 - 3n \\ v_{n+1} = 2v_n + 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_n = (-2)^n + 3n \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$$

أحسب الحدود الأربعة الأولى لكل من المتتاليات (u_n) و $(v_n)_{n \geq 2}$ و $(w_n)_{n \geq 1}$

2- تحديد متتالية

تحدد المتتالية اذا علمت حدودها أو الوسيطة التي تمكن من حساب أي حد من حدودها.
و هناك عدة طرق منها على الخصوص:

أ- المتتالية المحددة بالصيغة الصريحة للحد العام.

أمثلة

نعتبر المتتاليات العددية (u_n) و (v_n) و $(w_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بـ :

$$w_n = \frac{(-2)^n}{n+1} \quad \text{و} \quad v_n = a \quad \text{حيث } a \text{ عدد حقيقي} \quad \text{و} \quad u_n = 2n - 6$$

(u_n) و (v_n) و $(w_n)_{n \geq 1}$ متتاليات محددة بالصيغة الصريحة

أحسب الحد الثالث لكل من المتتاليات (u_n) و (v_n) و $(w_n)_{n \geq 1}$

ب - المتتالية الترجعية: أي لحساب حد من حدودها نرجع لحدود أخرى

أمثلة

نعتبر المتتاليات العددية (u_n) و (v_n) و $(w_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بـ :

$$\begin{cases} w_3 = 1 \\ w_{n+1} = 3w_n - 1 \quad n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} v_0 = 2 & v_1 = -1 \\ v_{n+1} = 2v_n + v_{n-1} & n \geq 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n = \frac{u_{n-1}}{1+u_{n-1}} & n \geq 1 \end{cases}$$

(u_n) و (v_n) و $(w_n)_{n \geq 1}$ متتاليات ترجعية

/1 أحسب u_1 ; u_2 ; u_3 ; v_2 ; v_3 ; w_2 ; w_3

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{2}{2n+1} \quad \text{بين بالترجع أن}$$

II- المتتاليات المحدودة – المتتاليات الرتبة

1- المتتالية المكبورة – المتتالية المصغورة – المتتالية المحدودة

أنشطة

$$v_n = \frac{n+1}{2n+3} \quad \text{و} \quad u_n = \frac{2}{3}n - 1 \quad \text{حيث } (v_n) \text{ و } (u_n)$$

$$1/ \text{ أحسب } v_1 \text{ و } v_0 \text{ و } u_1 \text{ و } u_0$$

$$2/ \text{ بين أن } \forall n \in \mathbb{N} \quad v_n \leq 1 \text{ و } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 3$$

لدينا $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 3$ نقول إن المتتالية (u_n) مصغورة بالعدد 3

$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n \leq 1$ نقول إن المتتالية (v_n) مكبورة بالعدد 1

تعريف

تكون المتتالية $(u_n)_{n \in I}$ مكبورة اذا وفقط اذا وجد عدد حقيقي M بحيث $\forall n \in I \quad u_n \leq M$

تكون المتتالية $(u_n)_{n \in I}$ مصغورة اذا وفقط اذا وجد عدد حقيقي m بحيث $\forall n \in I \quad u_n \geq m$

تكون المتتالية $(u_n)_{n \in I}$ محدودة اذا وفقط اذا كانت $(u_n)_{n \in I}$ مكبورة و مصغورة

ملاحظة $(u_n)_{n \in I}$ محدودة $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall n \in I \quad |u_n| \leq k$

تمرين

نعتبر المتتاليات العددية $(u_n)_{n \geq 1}$ و $(v_n)_{n \geq 1}$ و $(w_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بـ :

$$w_n = \frac{(-1)^n}{n+1} \quad \text{و} \quad \begin{cases} v_1 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n + 2 \end{cases} \quad \text{و} \quad u_n = 2n - 1$$

بين أن $(u_n)_{n \geq 1}$ مصغورة و $(v_n)_{n \geq 1}$ مكبورة بالعدد 3 و $(w_n)_{n \geq 1}$ محدودة.

2- المتتالية الرتبة

تعريف

تكون المتتالية $(u_n)_{n \in I}$ تزايدية اذا وفقط اذا كان لكل n و m من I : $n > m$ تستلزم $u_n \geq u_m$

تكون المتتالية $(u_n)_{n \in I}$ تزايدية قطعاً اذا وفقط اذا كان لكل n و m من I : $n > m$ تستلزم $u_n > u_m$

تكون المتتالية $(u_n)_{n \in I}$ تناقصية اذا وفقط اذا كان لكل n و m من I : $n > m$ تستلزم $u_n \leq u_m$

تكون المتتالية $(u_n)_{n \in I}$ تناقصية قطعاً اذا وفقط اذا كان لكل n و m من I : $n > m$ تستلزم $u_n < u_m$

تكون المتتالية $(u_n)_{n \in I}$ ثابتة اذا وفقط اذا كان لكل n و m من I لدينا $u_n = u_m$

أمثلة

أدرس رتبة المتتاليتين العدديتين (u_n) و (v_n) حيث $u_n = 2n - 1$ و $v_n = -3n + 5$

نشاط

برهن أن $(u_n)_{n \in I}$ متتالية تزايدية $\Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_{n+1} \geq u_n$

خاصيات

لتكن $(u_n)_{n \in I}$ متتالية حيث $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n\}$

$\forall n \in I \quad u_{n+1} \geq u_n \Leftrightarrow (u_n)_{n \in I}$ متتالية تزايدية

$$\forall n \in I \quad u_{n+1} > u_n \Leftrightarrow \text{متتالية تزايدية قطعاً } (u_n)_{n \in I}$$

$$\forall n \in I \quad u_{n+1} \leq u_n \Leftrightarrow \text{متتالية تناقصية } (u_n)_{n \in I}$$

$$\forall n \in I \quad u_{n+1} < u_n \Leftrightarrow \text{متتالية تناقصية قطعاً } (u_n)_{n \in I}$$

$$\forall n \in I \quad u_{n+1} = u_n \Leftrightarrow \text{متتالية ثابتة } (u_n)_{n \in I}$$

تمرين

نعتبر المتتاليات العددية (u_n) و $(v_n)_{n \geq 1}$ و $(w_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بـ :

$$\begin{cases} w_1 = 1 \\ w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + 1 \end{cases} \text{ و } v_n = \frac{2^n}{n} \text{ و } u_n = \frac{n}{n+1}$$

1- أدرس رتبة (u_n) و $(v_n)_{n \geq 1}$

2- أ- بين أن $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad w_n < 2$

ب- بين أن $(w_n)_{n \geq 1}$ تزايدية .

III- المتتالية الحسابية - المتتالية الهندسية

A- المتتالية الحسابية

1- تعريف

تكون متتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ حسابية إذا كان يوجد عدد حقيقي r بحيث $\forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} = u_n + r$ العدد r يسمى أساس المتتالية .

أمثلة

نعتبر المتتاليتين (u_n) و $(v_n)_{n \geq 1}$ حيث $u_n = -2n + 1$ و $v_n = \frac{1}{n}$

بين أن (u_n) متتالية حسابية محددًا أساسها.

هل $(v_n)_{n \geq 1}$ متتالية حسابية؟

2- صيغة الحد العام - مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية

نشاط

$(u_n)_{n \geq p}$ حسابية أساسها r و حدها الأول u_p

1/ بين بالترجع أن $\forall n \geq p \quad u_n = u_p + (n-p)r$

2/ نضع $S_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_{n-1}$

أ- بين بالترجع أن $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

ب- ما عدد حدود المجموع S_n

ت- بين أن $S_n = \frac{(n-p)(u_p + u_{n-1})}{2}$

خاصية

إذا كان $(u_n)_{n \geq p}$ متتالية حسابية أساسها r فإن $\forall n \geq p \quad u_n = u_p + (n-p)r$

ملاحظة - إذا كان (u_n) متتالية حسابية أساسها r فإن $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_0 + nr$

- إذا كان $(u_n)_{n \geq 1}$ متتالية حسابية أساسها r فإن $\forall n \geq 1 \quad u_n = u_1 + (n-1)r$

- إذا كان $(u_n)_{n \geq p}$ متتالية حسابية أساسها r فإن $\forall n \geq q \geq p \quad u_n = u_q + (n-q)r$

خاصية

لتكن $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية حسابية

إذا كان $S_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_{n-1}$ فان $S_n = \frac{(n-p)(u_p + u_{n-1})}{2}$ هو عدد حدود المجموع S_n و u_p هو الحد الأول للمجموع S_n و u_{n-1} هو الحد الأخير للمجموع S_n

ملاحظة

- إذا كان (u_n) متتالية حسابية فان S_n مجموع n حدا أولا منها هو

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = \frac{n(u_0 + u_{n-1})}{2}$$

- إذا كان $(u_n)_{n \geq 1}$ متتالية حسابية فان S_n مجموع n حدا أولا منها هو

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$$

تمرين

لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها 3 و حدها الأول $u_0 = -2$

1 / أحسب u_n بدلالة n و أحسب u_{200}

2 / أحسب مجموع 100 حدا أولا للمتتالية

تمرين

لتكن (u_n) متتالية حسابية حيث $u_{50} = 20$ و $u_{30} = -40$

1 / حدد أساس ثم الحد العام للمتتالية (u_n)

2 / أحسب المجموع $S = u_{15} + u_{16} + \dots + u_{54}$

تمرين

أحسب $S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1)$

تمرين

نعتبر المتتاليتين المعرفتين بـ

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_{n+1} - u_n \quad \begin{cases} u_0 = 1 ; u_1 = 3 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1- بين أن (v_n) متتالية ثابتة .

2- استنتج أن (u_n) متتالية حسابية و حدد عناصرها المميزة .

3- أحسب u_n بدلالة n . ثم أحسب $S_n = \sum_{i=1}^{i=n} u_i$ بدلالة n .

B- المتتالية الهندسية

1- تعريف

تكون متتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ هندسية إذا كان يوجد عدد حقيقي q بحيث $u_{n+1} = qu_n$ $\forall n \geq n_0$ العدد q يسمى أساس المتتالية .

أمثلة

(u_n) متتالية حيث $u_n = 3(2)^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

بين أن (u_n) متتالية هندسية محددًا أساسها

تمرين

نعتبر المتتاليتين العدديتين $(u_n)_{n \geq 1}$ و $(v_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بـ $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$ و $u_1 = 1$ و $v_n = u_n - 2$

بين أن $(v_n)_{n \geq 1}$ متتالية هندسية محددًا أساسها

2- صيغة الحد العام - مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية

نشاط

$(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q

1/ بين بالترجع أن $u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}$

2/ نعتبر $q \neq 1$ و $S_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_{n-1}$

أ- بين أن $S_n - qS_n = u_p - u_n$

ب- استنتج أن $S_n = u_p \left(\frac{1 - q^{n-p}}{1 - q} \right)$

خاصية

إذا كان $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q فإن $u_n = u_{n_0} q^{n-n_0} \quad \forall n \geq n_0$

ملاحظة - إذا كان (u_n) متتالية هندسية أساسها q فإن $u_n = u_0 q^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- إذا كان $(u_n)_{n \geq 1}$ متتالية هندسية أساسها q فإن $u_n = u_1 q^{n-1} \quad \forall n \geq 1$

- إذا كان $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q فإن $u_n = u_p q^{n-p} \quad \forall n \geq p \geq n_0$

أمثلة

* لتكن (u_n) متتالية هندسية أساسها $-\frac{1}{2}$ و حدها الأول $u_0 = 5$

حدد الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n

* لتكن (v_n) متتالية هندسية أساسها 3 و أحد حدودها $u_5 = -2$

حدد الحد العام للمتتالية (v_n) بدلالة n

خاصية

لتكن $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q يخالف 1

إذا كان $S_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_{n-1}$ فإن $S_n = u_p \left(\frac{1 - q^{n-p}}{1 - q} \right)$

$n - p$ هو عدد حدود المجموع S_n و u_p هو الحد الأول للمجموع

ملاحظة

- إذا كان (u_n) متتالية هندسية أساسها q يخالف 1 فإن S_n مجموع n حدا أولا منها هو

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = u_0 \left(\frac{1 - q^n}{1 - q} \right)$$

- إذا كان $(u_n)_{n \geq 1}$ متتالية هندسية أساسها q يخالف 1 فإن S_n مجموع n حدا أولا منها هو

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \left(\frac{1 - q^n}{1 - q} \right)$$

حالة خاصة

إذا كانت $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها 1 فإن $S_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_{n-1} = u_p (n - p)$

تمرين

1/ لتكن (u_n) متتالية هندسية أساسها $-\frac{1}{2}$ و حدها الأول $u_0 = 5$

حدد الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n

2/ لتكن (v_n) متتالية هندسية أساسها 3 و أحد حدودها $u_5 = -2$

حدد الحد العام للمتتالية (v_n) بدلالة n

تمرين

أحسب بدلالة n المجموع $S = 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 2^n$

تمرين

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ بحيث: $u_0 = -3$ و $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 4$ لكل $n \in \mathbb{N}$

نضع $v_n = u_n + 6$

1. بين أن (v_n) متتالية هندسية وحدد أساسها q وحدها الأول v_0

2. احسب v_n ثم u_n بدلالة n

3. نضع $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ لكل n من \mathbb{N}

احسب S_n بدلالة n
