

ملخص درس المتاليات:

متتالية هندسية

• لكي نبين أن متتالية هندسية نحسب: $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ العدد q الذي

نجده هو الأساس و $u_n = u_0 \times q^n$ هي الكتابة بدلالة n

• إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q غير منعدم

وحدها الأول u_0 فان: $u_n = u_0 q^{n-0}$

• إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q غير منعدم

وحدها الأول u_1 فان: $u_n = u_1 q^{n-1}$

• وبصفة عامة: $u_n = u_p q^{n-p}$

• مجموع حدود متتالية $(u_n)_{n \in I}$ هندسية أساسها q

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_0 \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right) \quad \text{حيث } q \neq 1$$

متتالية حسابية

• لكي نبين أن متتالية حسابية نحسب: $u_{n+1} - u_n$ العدد r الذي نجده هو

الأساس و $u_n = u_0 + nr$ هي الكتابة بدلالة n

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_1

فان: $u_n = u_1 + (n-1)r$

وبصفة عامة: $u_n = u_p + (n-p)r$

• مجموع حدود متتالية $(u_n)_{n \in I}$ حسابية:

$$n > p \geq n_0 \quad S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n$$

$$\text{هو: } S_n = (n-p+1) \left(\frac{u_n + u_p}{2} \right)$$

$$\text{ملاحظة: } S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = (n+1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right)$$

■ تكون المتتالية $(u_n)_{n \in I}$ ثابتة إذا وفقط إذا كان: $\forall n \in I \quad u_{n+1} = u_n$

مثال 1: أدرس رتبة المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة كالتالي:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2n + 3$$

الجواب: $u_{n+1} - u_n = 2(n+1) + 3 - (2n + 3) = 2 > 0$ إذن: (u_n)

تزايدية قطعاً

مثال 2: أدرس رتبة المتتالية (v_n) المعرفة كالتالي: $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{2}{n}$

$$\text{الجواب: } v_{n+1} - v_n = \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n} = \frac{2n - 2(n+1)}{n(n+1)} = \frac{-2}{n(n+1)} < 0$$

إذن: (v_n) تناقصية قطعاً

مثال 3: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} \\ u_0 = 3 \end{cases} \quad \text{كالتالي:}$$

بين أن المتتالية (u_n) مصغورة بالعدد 2

الأجوبة: (1) يكفي ان نبين أن: $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2 \leq u_n$ ؟؟؟؟

نستعمل برهاننا بالترجع

⊙ نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 0$

لدينا $u_0 = 3 \geq 2$ إذن: العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 0$

⊙ نفترض أن: $u_n \geq 2$

⊙ نبين أن: $u_{n+1} \geq 2$ ؟؟؟؟؟

$$\text{نحسب الفرق: } u_{n+1} - 2 = \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} - 2 = \frac{8(u_n - 1) - 2(u_n + 2)}{u_n + 2} = \frac{6u_n - 12}{u_n + 2}$$

$$u_{n+1} - 2 = \frac{6(u_n - 2)}{u_n + 2} \quad \text{و حسب افتراض التراجع لدينا: } u_n \geq 2$$

إذن: $u_{n+1} - 2 \geq 0$ و $u_n + 2 > 0$ و منه $u_{n+1} \geq 2$

وبالتالي: $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 2$

تعريف: لتكن $(u_n)_{n \in I}$ متتالية عددية

■ نقول إن $(u_n)_{n \in I}$ مكبورة إذا وجد عدد حقيقي M بحيث $\forall n \in I \quad u_n \leq M$

■ نقول إن $(u_n)_{n \in I}$ مصغورة إذا وجد عدد حقيقي m بحيث $\forall n \in I \quad u_n \geq m$

■ نقول إن $(u_n)_{n \in I}$ محدودة إذا كانت مكبورة مصغورة.

مثال: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي: $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{n+1}{2n+1}$

$$1. \text{ بين أن: } \forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{2} < u_n \leq 1$$

2. ماذا يمكن أن نقول عن المتتالية (u_n) ؟

الأجوبة: (أ) نبين أن: $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq 1$ ؟؟؟؟

$$\text{نحسب الفرق: } 1 - u_n = 1 - \frac{n+1}{2n+1} = \frac{(2n+1) - (n+1)}{2n+1} = \frac{n}{2n+1} \geq 0$$

ومنه: $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq 1$ ①

$$(أ) \text{ نبين أن: } \forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{2} < u_n \quad \text{؟؟؟؟}$$

$$\text{نحسب الفرق: } u_n - \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2n+1} - \frac{1}{2} = \frac{2(n+1) - (2n+1)}{2(2n+1)} = \frac{1}{2n+1} > 0$$

ومنه: $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{2} < u_n$ ②

وبالتالي من ① و ② نجد: $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{2} < u_n \leq 1$

(2) نقول المتتالية العددية (u_n) مكبورة إذا وجد عدد حقيقي 1

و نقول المتتالية العددية (u_n) مصغورة إذا وجد عدد حقيقي $\frac{1}{2}$

و نقول المتتالية العددية (u_n) محدودة

خاصية: لتكن $(u_n)_{n \in I}$ متتالية عددية

■ تكون المتتالية $(u_n)_{n \in I}$ تزايدية إذا وفقط إذا كان: $\forall n \in I \quad u_{n+1} \geq u_n$

■ تكون المتتالية $(u_n)_{n \in I}$ تناقصية إذا وفقط إذا كان: $\forall n \in I \quad u_{n+1} \leq u_n$