النهايات

الأولى علوم رياضية

الأستاذ : عثماني نجيب

1- النهاية لا منتهية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

نشاط

نعتبر الدالة f حيث $f(x)=x^3$

1- أرسم C_f

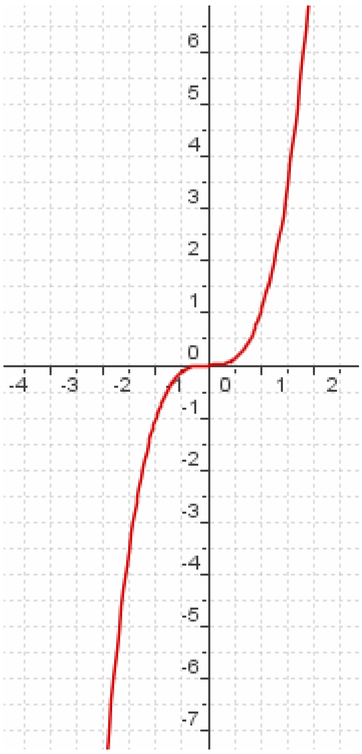
2- أتمم الجدول التالي

x	$-10^{10^{100}}$	$-10^{10^{12}}$	-10^{10^9}	-10^{100}	-10	10	10^{100}	10^{10^9}	$10^{10^{12}}$	$10^{10^{100}}$
$f(x)$										

من خلال الشكل و الجدول

ماذا تستنتج لـ $f(x)$ عندما يأخذ x قيما أكبر فأكبر و موجبة أي عندما يؤول x إلى $+\infty$

ماذا تستنتج لـ $f(x)$ عندما يأخذ x قيما أصغر فأصغر و سالبة أي عندما يؤول x إلى $-\infty$



نلاحظ من خلال الجدول و المنحنى عندما يأخذ x قيما أكبر فأكبر و موجبة فان $f(x)$ تأخذ قيما أكبر فأكبر و موجبة وتؤول الى $+\infty$ عندما يؤول x إلى $+\infty$

نقول إن نهاية $f(x)$ هي $+\infty$ عندما يؤول x إلى $+\infty$

نكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

نلاحظ من خلال الجدول و المنحنى عندما يأخذ x قيما أصغر فأصغر و سالبة فان $f(x)$ تأخذ قيما أصغر فأصغر و سالبة وتؤول الى $-\infty$ عندما يؤول x إلى $-\infty$

نقول إن نهاية $f(x)$ هي $-\infty$ عندما يؤول x إلى $-\infty$

نكتب $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$

كتابات و نهايات اعتيادية

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال $[a;+\infty[$

إذا كان $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول x إلى $+\infty$ فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ أو $\lim\limits_{+\infty} f(x)=+\infty$

و تقرأ نهاية $f(x)$ هي $+\infty$ عندما يؤول x إلى $+\infty$

إذا كان $f(x)$ يؤول إلى $-\infty$ عندما يؤول x إلى $+\infty$ فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ أو $\lim\limits_{+\infty} f(x)=-\infty$

و تقرأ نهاية $f(x)$ هي $-\infty$ عندما يؤول x إلى $+\infty$

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال $]-\infty;a]$

إذا كان $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول x إلى $-\infty$ فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ أو $\lim\limits_{-\infty} f(x)=+\infty$

و تقرأ نهاية $f(x)$ هي $+\infty$ عندما يؤول x إلى $-\infty$

إذا كان $f(x)$ يؤول إلى $-\infty$ عندما يؤول x إلى $-\infty$ فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ أو $\lim\limits_{-\infty} f(x)=-\infty$

و تقرأ نهاية $f(x)$ هي $-\infty$ عندما يؤول x إلى $-\infty$

نهايات اعتيادية

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=+\infty$ إذا كان n زوجي

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=-\infty$ إذا كان n فردي

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty$

أمثلة $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

2- النهاية منتهية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

نشاط

نعتبر الدالة f حيث $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$

1- باستعمال احد البرامج المعلوماتية أرسم C_f

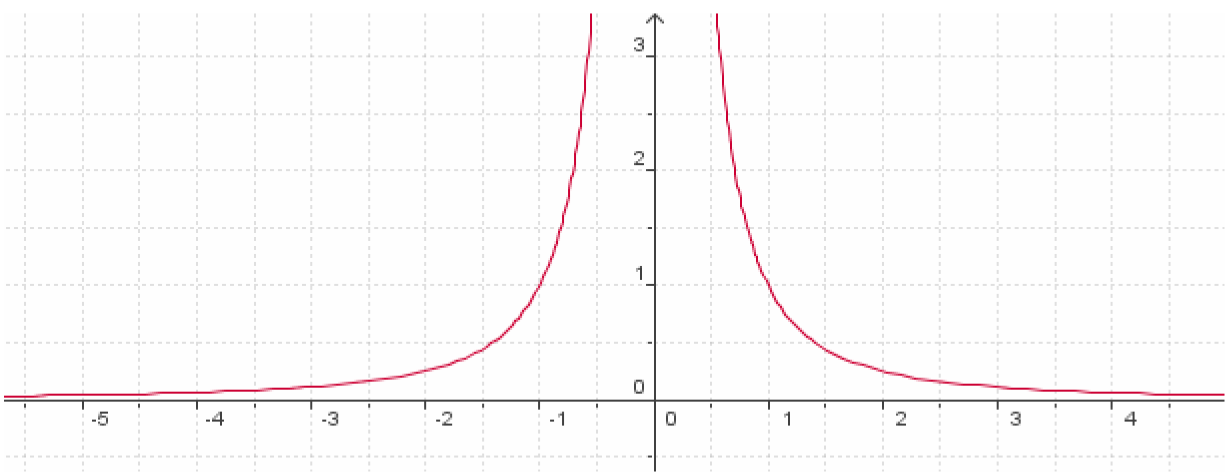
2- أتمم الجدول التالي

x	$-10^{10^{100}}$	$-10^{10^{12}}$	$-10^{10^{9}}$	-10^{100}	-10	10	10^{100}	$10^{10^{9}}$	$10^{10^{12}}$	$10^{10^{100}}$
$f(x)$										

من خلال الشكل و الجدول

ماذا تستنتج لـ $f(x)$ عندما يأخذ x قيما أكبر فأكبر و موجبة أي عندما يؤول x إلى $+\infty$

ماذا تستنتج لـ $f(x)$ عندما يأخذ x قيما أصغر فأصغر و سالبة أي عندما يؤول x إلى $-\infty$



نلاحظ في كلتا الحالتين $f(x)$ يؤول إلى 0 نكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

نشاط

نعتبر الدالة f حيث $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$

1- أرسم C_f

2- خد قيما أكبر فأكبر وموجبة و أملئ بها الجدول

x										
$f(x)$										

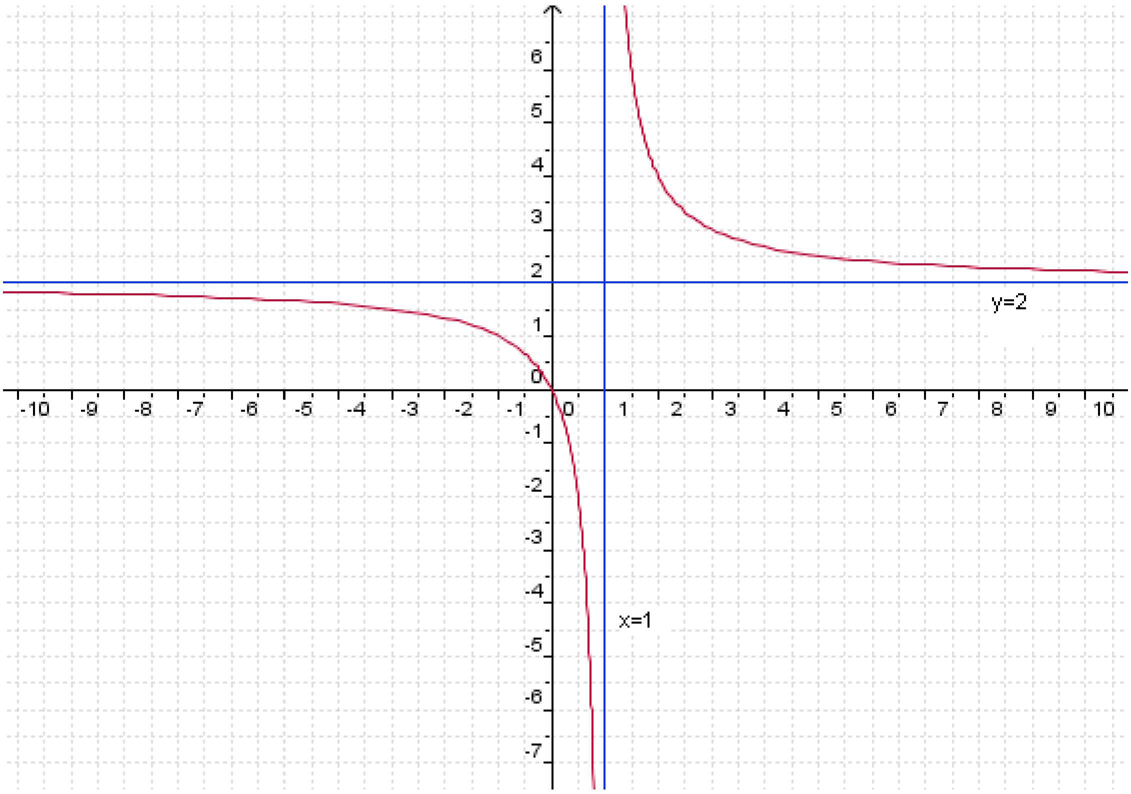
من خلال الشكل و الجدول

ماذا تستنتج لـ $f(x)$ عندما يأخذ x قيما أكبر فأكبر و موجبة أي عندما يؤول x إلى $+\infty$

خد قيما أصغر فأصغر وسالبة و أملئ بها الجدول

x										
$f(x)$										

ماذا تستنتج لـ $f(x)$ عندما يأخذ x قيما أصغر فأصغر و سالبة أي عندما يؤول x إلى $-\infty$



نلاحظ في كلتا الحالتين $f(x)$ يؤول إلى2 نكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$

النهاية منتهية عند $+\infty$

لتكن f يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع $]a;+\infty[$

اذا كان $f(x)$ تؤول إلى l عندما يؤول x إلى $+\infty$ فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ أو $\lim\limits_{+\infty} f(x)=l$

النهاية منتهية عند $-\infty$

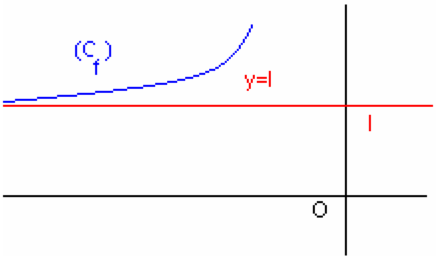
لتكن f يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع $]-\infty;a[$

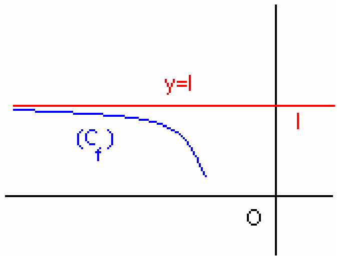
اذا كان $f(x)$ تؤول إلى l عندما يؤول x إلى $-\infty$ فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l$ أو $\lim\limits_{-\infty} f(x)=l$

ملاحظات

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l$ *

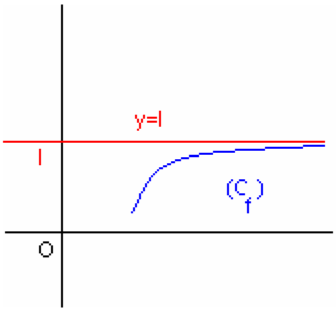
منحنى الدالة يقترب أكثر و أكثر من المستقيم ذا المعادلة $y=l$ عندما يؤول x إلى $-\infty$

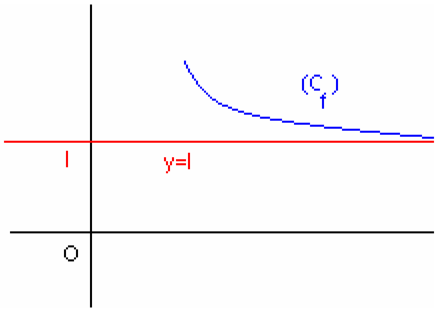




$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ *

منحنى الدالة يقترب أكثر و أكثر من المستقيم ذا المعادلة $y=l$ عندما يؤول x إلى $+\infty$





-* إذا كانت f زوجية فان $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

-* إذا كانت f فردية فان $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

نهايات اعتيادية

$\forall(k;n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{N}^*\quad \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0\qquad \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0\quad;\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$

خاصية

لتكن f دالة عددية و l عددا حقيقيا

- اذا كانت f تقبل نهاية l في $+\infty$ أو $(-\infty)$ فان هذه النهاية وحيدة
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-l\right)=0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-l\right)=0$

تمرين

نعتبر $f(x)=\dfrac{-3x^2+1}{x^2}$

بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-3$

الجواب

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-(-3)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^2+1}{x^2}+3=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$$

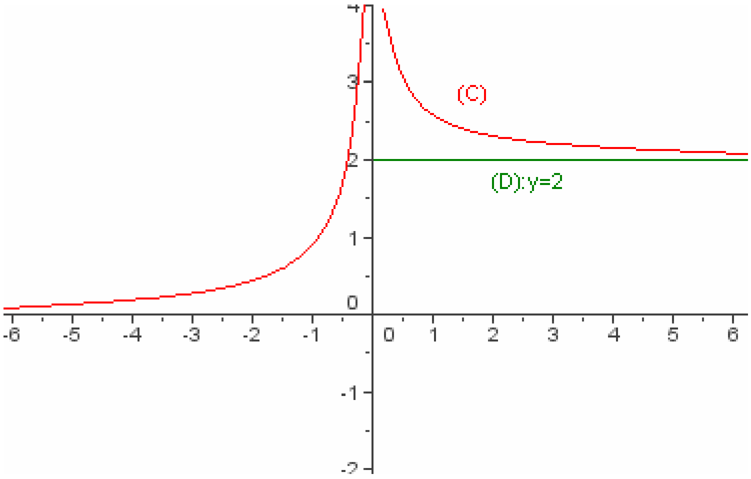
اذن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3$

تمرين : قراءة نهايات مبيانيا

لتكن f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}^*$

من خلال الشكل

حدد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$



من خلال الشكل

المنحنى يقترب من المستقيم $(D): y=2$ عندما يؤول x إلى $+\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$

المنحنى يقترب من محور الأفاصيل عندما يؤول x إلى $-\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

3- نهاية منتهية و لا منتهية لدالة في نقطة

نشاط

نعتبر الدالة f حيث $f(x)=x^2$ و $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$

1- أ/ أرسم C_f

ب/ أتمم الجدول التالي

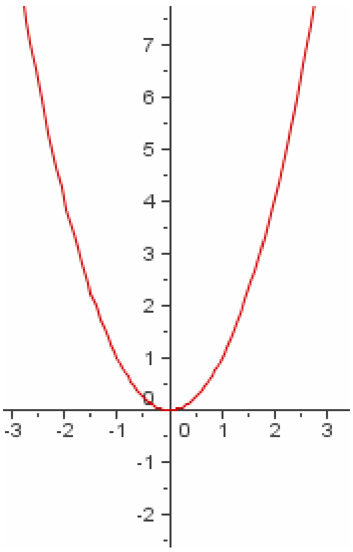
x	-0,2	$-0,1$	$-0,001$	-10^{-30}	10^{-30}	0,001	0,1	0,2
$f(x)$								

من خلال الشكل و الجدول ماذا تلاحظ استنتج $\lim\limits_{x\to0} f(x)$

2- أتمم الجدول التالي

x	-0,2	$-0,1$	$-0,001$	-10^{-30}	10^{-30}	0,001	0,1	0,2
$g(x)$								

من خلال الجدول ماذا تلاحظ تضن $\lim\limits_{x\to0} g(x)$



1/ من خلال الشكل و الجدول

نلاحظ أن $f(x)$ تؤول إلى 0 عندما يؤول x إلى 0

نقول إن نهاية $f(x)$ هي 0 عند 0

نكتب $\lim\limits_{x\to0} f(x)=0$

2/ من خلال الجدول

نلاحظ أن $f(x)$ تأخذ قيما أكبر فأكبر وموجبة أي تؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول x إلى 0

نقول إن نهاية $f(x)$ هي $+\infty$ عند 0

نكتب $\lim\limits_{x\to0} f(x)=+\infty$

نهاية منتهية لدالة في نقطة

ليكن a و l عددين حقيقين و f دالة عددية يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع $]a-\alpha;a+\alpha[$ أو مجموعة من نوع $]a-\alpha;a+\alpha[-\{a\}$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}^{+*}$

إذا كان $f(x)$ تؤول إلى l عندما يؤول x إلى a فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ أو $\lim\limits_{a} f=l$

خاصية

ليكن a و l عددين حقيقين $\lim\limits_{x\to 0} x^n=0$

إذا كان $f(x)$ تقبل l في a عان النهاية وحيدة

نهايات اعتيادية

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم

$\lim\limits_{x\to 0} x^n=0$

أمثلة $\lim\limits_{x\to 0} x=0$ $\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$ $\lim\limits_{x\to 0} x^3=0$

نهاية لامنتهية لدالة في نقطة

ليكن a و l عددين حقيقين و f دالة عددية يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع $]a-\alpha;a+\alpha[$ أو مجموعة من نوع $]a-\alpha;a+\alpha[-\{a\}$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}^{+*}$

إذا كان $f(x)$ تؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول x إلى a فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ أو $\lim\limits_{a} f=+\infty$

إذا كان $f(x)$ تؤول إلى $-\infty$ عندما يؤول x إلى a فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ أو $\lim\limits_{a} f=-\infty$

3-النهاية على اليمين- النهاية على اليسار

نشاط

نعتبر الدالة f المعرفة بـ $f(x)=\dfrac{|x-1|(x+2)}{x-1}$

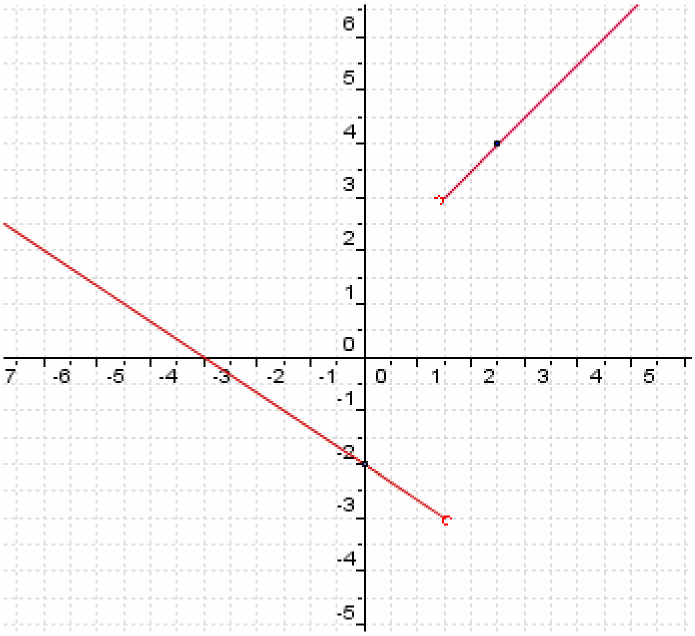
حدد D_f

أنشئ C_f

من خلال التمثيل المبياني حدد إلى ماذا يؤول $f(x)$ عندما يقترب x من 1 على اليمين

من خلال التمثيل المبياني حدد إلى ماذا يؤول $f(x)$ عندما يقترب x من 1 على اليسار

$D_f=\mathbb{R}-\{1\}$



نلاحظ أن كلما اقتربنا من 1 على اليمين إلا و $f(x)$ تقترب من 3 نقول إن نهاية $f(x)$ عندما يؤول x إلى 1 على اليمين هي 3 نكتب

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=3$ أو $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\succ 1}} f(x)=3$

نلاحظ أن كلما اقتربنا من 1 على اليسار إلا و $f(x)$ تقترب من -3 نقول إن نهاية $f(x)$ عندما يؤول x إلى 1 على اليسار هي -3 نكتب

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-3$ أو $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\prec 1}} f(x)=-3$

نشاط

نعتبر الدالة f المعرفة بـ $f(x)=\frac{1}{x}$

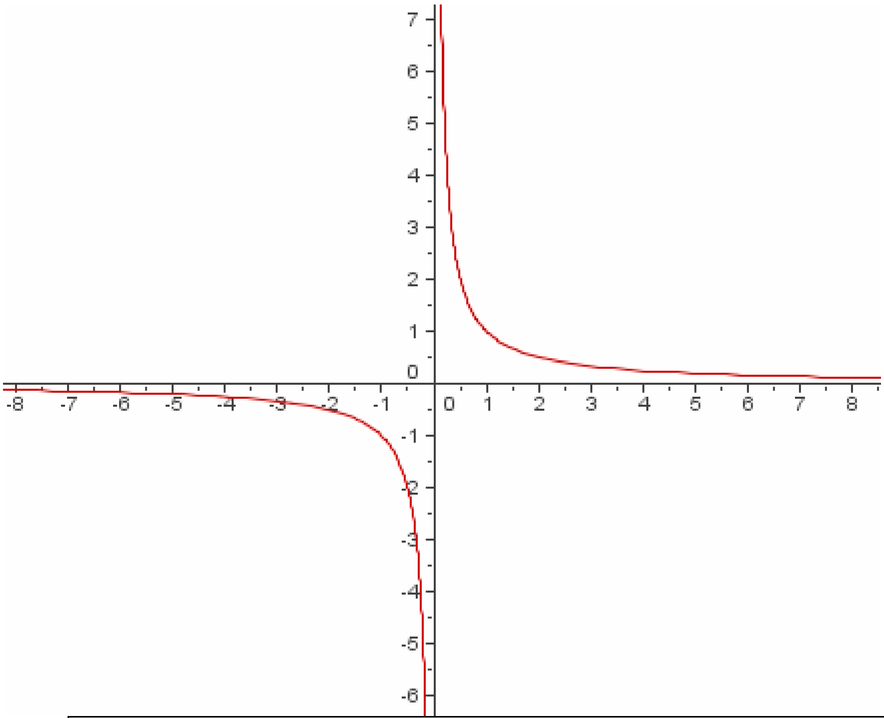
حدد D_f

أنشئ C_f

من خلال التمثيل المبياني حدد إلى ماذا يؤول $f(x)$ عندما يقترب x من 0 على اليمين

من خلال التمثيل المبياني حدد إلى ماذا يؤول $f(x)$ عندما يقترب x من 0 على اليسار

$D_f=\mathbb{R}^*$



نلاحظ أن كلما اقتربنا من 0 على اليمين فان $f(x)$ تؤول $+\infty$ نقول إن نهاية $f(x)$ عندما يؤول x إلى 0 على اليمين هي $+\infty$ نكتب $\lim_{x\to0^+} f(x)=+\infty$

أو $\lim_{\substack{x\to0\\x\succ0}} f(x)=+\infty$

نلاحظ أن كلما اقتربنا من 0 على اليسار فان $f(x)$ تؤول $-\infty$ نقول إن نهاية $f(x)$ عندما يؤول x إلى 0 على اليسار هي $-\infty$ نكتب $\lim_{x\to0^-} f(x)=-\infty$

أو $\lim_{\substack{x\to0\\x\prec0}} f(x)=-\infty$

ليكن a و l عددين حقيقيين

إذا كان $f(x)$ تؤول إلى l عندما يؤول x إلى a على اليمين فإننا نكتب $\lim_{x\to a^+} f(x)=l$ أو $\lim_{\substack{x\to a\\x\succ a}} f(x)=l$

إذا كان $f(x)$ تؤول إلى l عندما يؤول x إلى a على اليسار فإننا نكتب $\lim_{x\to a^-} f(x)=l$ أو $\lim_{\substack{x\to a\\x\prec a}} f(x)=l$

إذا كان $f(x)$ تؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول x إلى a على اليمين فإننا نكتب $\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ أو $\lim_{\substack{x\to a\\x\succ a}} f(x)=+\infty$

إذا كان $f(x)$ تؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول x إلى a على اليسار فإننا نكتب $\lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ أو $\lim_{\substack{x\to a\\x\prec a}} f(x)=+\infty$

إذا كان $f(x)$ تؤول إلى $-\infty$ عندما يؤول x إلى a على اليمين فإننا نكتب $\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ أو $\lim_{\substack{x\to a\\x\succ a}} f(x)=-\infty$

إذا كان $f(x)$ تؤول إلى $-\infty$ عندما يؤول x إلى a على اليسار فإننا نكتب $\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ أو $\lim_{\substack{x\to a\\x\prec a}} f(x)=-\infty$

نهايات اعتيادية

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^n}=+\infty$$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty$ إذا كان n زوجيا

$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$ إذا كان n فرديا

$\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$ $\quad \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

أمثلة

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^4} = +\infty$

مبرهنة

لتكن f دالة عددية

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ تكافئ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ تكافئ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ تكافئ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

تمرين

لتكن f دالة عددية حيث

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} & x \succ 0 \\ f(x) = x^3 & x \leq 0 \end{cases}$$

حدد $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ استنتج $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

الجواب

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$ و $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x^3 = 0$ ومنه $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$

إذن $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

تمرين

لتكن f دالة عددية حيث $f(x) = \dfrac{x^2-4}{|x+2|}$

1- بين أن $\lim\limits_{x\to -2} x-2 = -4$ و $\lim\limits_{x\to -2} -x+2 = 4$

2- استنتج $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$

3- هل الدالة f تقبل نهاية في -2

الجواب

1- نبين أن $\lim\limits_{x\to -2} x-2 = -4$

نضع $X = x+2$ أي $X-2 = x$

عندما يؤول x أي -2 فان X تؤول إلى 0

$\lim\limits_{x\to -2} x-2 = \lim\limits_{X\to 0} X-4$

و حيث أن $\lim\limits_{X\to 0} X = 0$ $\lim\limits_{X\to 0} \left[(X-4)-(-4)\right] =$ فان $\lim\limits_{X\to 0} X-4 = -4$ اذن $\lim\limits_{x\to -2} x-2 = -4$

نبين أن $\lim\limits_{x\to -2} -x+2 = 4$

$\lim\limits_{x\to -2} -x+2 = \lim\limits_{X\to 0} -X+4$

وحيث أن $\lim\limits_{X\to 0} -X = 0$ $\lim\limits_{X\to 0}\left[(-X+4)-4\right] = 44$ $\lim\limits_{X\to 0} -X+4 = 44$ اذن $\lim\limits_{x\to -2} -x-2 = 4$

2/ نستنتج $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$

لدينا $f(x) = \dfrac{x^2-4}{|x+2|} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x+2} = x-2$ $\forall x \succ -2$

ومنه $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} x-2 = -4$

لدينا $f(x) = \dfrac{x^2-4}{|x+2|} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{-(x+2)} = -x+2$ $\forall x \prec -2$

ومنه $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} -x-2 = 4$

3/ لدينا $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$ إذن الدالة f لا تقبل نهاية في -2

4- العمليات على النهايات

نقبل جميع العمليات الاتية

نعتبر دالتين f و g.

عند x_0 أو عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ تكون لدينا النتائج التالية:

أ- نهاية مجموع

نهاية f	نهاية g	نهاية $f+g$
l	l'	$l+l'$
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد

ب- نهاية جداء

نهاية f	نهاية g	نهاية $f\times g$
l	l'	$l\times l'$
l $l\neq 0$	$+\infty$	∞ مع وضع إشارة l
l $l\neq 0$	$-\infty$	∞ مع وضع عكس إشارة l
0	$+\infty$	شكل غير محدد
0	$-\infty$	شكل غير محدد
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$

ملاحظة:

لحساب نهاية λf حيث $\lambda\in\mathbb{R}$ يمكن اعتبار λf كجداء الدالة

الثابتة $x \to \lambda$ التي نهايتها هي λ و الدالة f

ج- نهاية خارج

نهاية f	نهاية g	نهاية $\frac{f}{g}$
l	l' و $l' \neq 0$	$\frac{l}{l'}$
l	$+\infty$	0
l	$-\infty$	0
$l \succ 0$ أو $+\infty$	0^+	$+\infty$
$l \prec 0$ أو $-\infty$	0^+	$-\infty$
$l \succ 0$ أو $+\infty$	0^-	$-\infty$
$l \prec 0$ أو $-\infty$	0^-	$+\infty$
0	0	شكل غير محدد
$+\infty$	$+\infty$	شكل غير محدد
$-\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد
$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد
$+\infty$	l حيث $l \neq 0$	∞ مع وضع إشارة l
$-\infty$	l حيث $l \neq 0$	∞ مع وضع عكس إشارة l

د- نهاية دالة حدودية – دالة جدرية

لتكن $P(x)$ و $Q(x)$ حدوديتين

$\lim_{x\to a} P(x) = P(a)$ $\qquad$ $\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$ في حالة $Q(a) \neq 0$

إذا كانت ax^n و bx^m هما على التوالي حديتي $P(x)$ و $Q(x)$ الأكبر درجة فان

$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} ax^n$ و $\lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} ax^n$

و $\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax^n}{bx^m}$ و $\lim_{x\to-\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{ax^n}{bx^m}$

أمثلة

$$\lim_{x\to 2} x^3 - x^2 + 3x - 1 = 2^3 - 2^2 + 6 - 1 = 9$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{-3x^2 - x + 1}{3x^3 + 2x^2 - 3} = \frac{-3(-1)^2 - (-1) + 1}{3(-1)^3 + 2(-1)^2 - 3} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to+\infty} -4x^5 + 3x^2 - 5x + 1 = \lim_{x\to+\infty} -4x^5 = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} -3x^7 + 7x^3 - x + 31 = \lim_{x\to-\infty} -3x^7 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x^5+3x^2-5x+1}{3x^2-x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x^5}{3x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{3}x^3=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^7+7x^3-x+31}{x^9+3x^2-4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^7}{x^9}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3}{x^2}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^5+3x^2-5x+1}{3x^5-x^4+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^5}{3x^5}=\frac{7}{3}$$

تمرين

حدد النهايات

$$\lim_{x\to-\infty}(1-x)^5\left(-2x^2+5\right)\qquad \lim_{x\to+\infty}7x^5+3+\frac{1}{\sqrt{x}}\qquad \lim_{x\to3}\frac{x^2-x}{x^2+x-6}$$

$$\lim_{x\to+\infty}x-\sqrt{x}\qquad \lim_{x\to0^+}\frac{3}{-x^2+x}\qquad \lim_{x\to1^+}\frac{2x-5}{x-1}\qquad \lim_{x\to2^-}\frac{1}{x-2}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{2x^2+x-3}\ ;\ \lim_{x\to-1}\frac{x+1}{x^2-2x-3}$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{3x-2}{x^2-3x+2}\qquad \lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)$$

الجواب

نحدد النهايات

* لدينا $\lim_{x\to3}x^2-x=9-3=6$ و $\lim_{x\to3}x^2+x-6=9+3-6=6$ ومنه $\lim_{x\to3}\frac{x^2-x}{x^2+x-6}=\frac{6}{6}=1$

* $\lim_{x\to+\infty}7x^5+3=\lim_{x\to+\infty}7x^5=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$ ومنه $\lim_{x\to+\infty}7x^5+3+\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

* $\lim_{x\to-\infty}-2x^2+5=\lim_{x\to-\infty}-2x^2=-\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}(1-x)^5=\lim_{x\to-\infty}-x^5=+\infty$ ومنه $\lim_{x\to-\infty}(1-x)^5\left(-2x^2+5\right)=-\infty$

*إذا كان $x\prec2$ فان $x-2\prec0$ ومنه $\lim_{x\to2^-}x-2=0^-$ إذن $\lim_{x\to2^-}\frac{1}{x-2}=-\infty$

* نحدد $\lim_{x\to1^+}\frac{2x-5}{x-1}$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	-	0	+

ومنه $\lim_{x\to1^+}x-1=0^+$ و لدينا $\lim_{x\to1^+}2x-5=-3$ إذن $\lim_{x\to1^+}\frac{2x-5}{x-1}=-\infty$

* نحدد $\lim_{x\to+\infty}x-\sqrt{x}$

نحصل على الشكل الغير المحدد $(+\infty-\infty)$

$\lim_{x\to+\infty}x-\sqrt{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)$ وحيث $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}-1=+\infty$ فان $\lim_{x\to+\infty}x-\sqrt{x}=\infty$

* نحدد $\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{x^2-2x-3}$ بتعويض x نحصل على الشكل الغير المحدد $\frac{0}{0}$

$$\frac{x+1}{x^2-2x-3}=\frac{x+1}{(x+1)(x-3)}=\frac{1}{x-3}\qquad \forall x\in\mathbb{R}-\{-1;3\}$$

ومنه $\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{x-3}=-\frac{1}{4}$

* نحدد $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{2x^2+x-3}$ بتعويض x نحصل على الشكل الغير المحدد $\frac{0}{0}$

ومنه الحدوديتان x^2+x-2 و $2x^2+x-3$ تقبلان القسمة على $x-1$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{2x^2+x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(2x+3)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{2x+3}=\frac{3}{5}$$

* نحدد $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)$

لدينا $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^3}=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}=+\infty$ و منه نحصل على الشكل الغير المحدد $(+\infty-\infty)$

$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{1}{x}\right)$ وحيث $\lim_{x\to 0^+}\left(1-\frac{1}{x}\right)=-\infty \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}=+\infty$

فان $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)=-\infty$

*نحدد $\lim_{x\to 1^-}\frac{3x-2}{x^2-3x+2}$

لدينا $\lim_{x\to 1}x^2-3x+2=0 \qquad \lim_{x\to 1}3x-2=1$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		+	0	-	0	+	

ومنه $\lim_{x\to 1^-}x^2-3x+2=0^-$ إذن $\lim_{x\to 1^-}\frac{3x-2}{x^2-3x+2}=-\infty$

6 – نهايات الدوال اللاجدرية

خاصية

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال من شكل $[a;+\infty[$

إذا كانت $\lim_{x\to a}f(x)=l$ و $l\geq 0$ فان $\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)}=\sqrt{l}$

إذا كانت $\lim_{x\to a}f(x)=+\infty$ و $l\geq 0$ فان $\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)}=+\infty$

ملحوظة:

الخاصية تبقى صحيحة اذا كان x يؤول الى $+\infty$ أو الى $-\infty$ أو الى a على اليمين أو a على اليسار

أمثلة:

لنحسب $\lim_{x\to -2}\sqrt{1-4x}$

لدينا $\lim_{x\to -2}1-4x=9$ ومنه $\lim_{x\to -2}\sqrt{1-4x}=\sqrt{9}=3$

لنحسب $\lim_{x\to -\infty}\sqrt{3x^2-5x+4}$

لدينا $\lim_{x\to -\infty}3x^2=+\infty$ $\lim_{x\to -\infty}3x^2-5x+4=$ ومنه $\lim_{x\to -\infty}\sqrt{3x^2-5x+4}=\infty$

لنحسب $\lim_{x\to 0^-}\sqrt{1-\frac{1}{x}}$

لدينا $\lim_{x\to 0^-}1-\frac{1}{x}=+\infty$ و منه $\lim_{x\to 0^-}\sqrt{1-\frac{1}{x}}=+\infty$

7- النهايات والترتيب

f و g و h دوال عددية و $I=]x_0-\alpha;x_0+\alpha[-\{x_0\}$ ضمن حيز تعريف هذه الدوال

* إذا كان لكل x من I , $|f(x)-l|\le u(x)$ و كان $\lim_{x\to x_0} u(x)=0$ فان $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$

* إذا كان $\lim_{x\to x_0} g(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ وكان $f\ge h\ge g$ على I فان $\lim_{x\to x_0} h(x)=l$

* إذا كان لكل x من I , $f(x)\ge u(x)$ و كان $\lim_{x\to x_0} u(x)=+\infty$ فان $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$

* إذا كان لكل x من I , $f(x)\le u(x)$ و كان $\lim_{x\to x_0} u(x)=-\infty$ فان $\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty$

ملاحظة

الخاصيات السابقة تبقى صالحة عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ أو عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار مع تعويض I بالمجموعة المناسبة

أمثلة

* نحسب $\lim_{x\to+\infty} x+\sin x$

لدينا الدالة $x\to\sin^2 x$ لا تقبل نهاية

ونعلم أن $-1\le\sin x\le 1$ $\forall x\in\mathbb{R}$ ومنه $x-1\le x+\sin x\le x+1$

و حيث $\lim_{x\to+\infty} x-1=+\infty$ فان $\lim_{x\to+\infty} x+\sin x=+\infty$

* نبين أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+\sin x}{x^2+1}=2$

لدينا $\left|\frac{2x^2+\sin x}{x^2+1}-2\right|=\left|\frac{\sin x-2}{x^2+1}\right|$

$|\sin-2|\le|\sin x|+|2|$ وحيث أن $|\sin x|\le 1$ فان $|\sin-2|\le 3$

ومنه $\left|\frac{\sin x-2}{x^2+1}\right|\le\frac{3}{x^2+1}$ أي $\left|\frac{2x^2+\sin x}{x^2+1}-2\right|\le\frac{3}{x^2+1}$

و حيث $\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x^2+1}=0$ فان $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+\sin x}{x^2+1}=2$

8- نهايات مثلثية

أ/ خاصية

لكل عدد حقيقي a

$\lim_{x\to a}\sin x=\sin a$ و $\lim_{x\to a}\cos x=\cos a$

لكل عدد حقيقي a حيث $a\ne\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $k\in\mathbb{Z}$

$\lim_{x\to a}\tan x=\tan a$

أمثلة

$\lim_{x\to-\frac{\pi}{4}}\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\lim_{x\to 0}\cos x=\cos 0=1$

$\lim_{x\to\pi}\tan x=\tan\pi=0$

ب/ نقبل $|\sin x|\le|x|\le|\tan x|$ $\forall x\in\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

لنحدد $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$

لدينا $|\sin x|\le|x|\le|\tan x|$ $\forall x\in\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ ومنه $\frac{1}{|\tan x|}\le\frac{1}{|x|}\le\frac{1}{|\sin x|}$ حيث $x\neq 0$

وبالتالي $\frac{|\sin x|}{|\sin x|}\le\frac{|\sin x|}{|x|}\le\frac{|\sin x|}{|\tan x|}$ أي أن $|\cos x|\le\left|\frac{\sin x}{x}\right|\le 1$

و حيث أن $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$ و x و $\sin x$ لهما نفس الإشارة بجوار 0 فان $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

* لنحدد $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

نضع $X=\frac{x}{2}$ ومنه $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{X\to 0}\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sin X}{X}\right)^2=\frac{1}{2}$

* لنحدد $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$

لدينا $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{\cos x}=1\times\frac{1}{1}=1$

خاصية

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

نتيجة

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}=1$ و $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan ax}{ax}=1$

تمرين

حدد $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2x}{1+\sin x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}$ ، $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{4x}$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{3x^2}$ ، $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin 3x}$ ،

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 2x}$ ، $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}$