

ملخص درس الترتيب في مجموعة الأعداد الحقيقية

IV. المجالات: ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث $a < b$.
ندرج في الجدولين التاليين جميع أنواع المجالات:
مصطلحات: الرمز $+\infty$ و $-\infty$ ليسا بعددين

المتفاوتة	المجال	المتفاوتة	المجال
$x > b$	$]b, +\infty[$	$a \leq x \leq b$	$[a, b]$
$x \geq b$	$[b, +\infty[$	$a < x \leq b$	$]a, b]$
$x \leq a$	$]-\infty, a]$	$a \leq x < b$	$[a, b[$
$x < a$	$]-\infty, a[$	$a < x < b$	$]a, b[$

- $+\infty$ تقرأ: زائد اللانهاية, $-\infty$ تقرأ: ناقص اللانهاية.
- $[a, b]$ يقرأ: "المجال المغلق a, b " أو "القطعة a, b ".
- $]a, b[$ يقرأ "المجال المفتوح a, b ".
- $]a, +\infty[$ يقرأ "المجال a , زائد اللانهاية, مفتوح من a ".

ملحوظة: $\mathbb{R}^+ =]0, +\infty[$ و $\mathbb{R}^- =]-\infty, 0[$

و $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$ و $\mathbb{R}_-^* =]-\infty, 0[$

V. تأطير عدد حقيقي: تعريف: ليكن x عددا حقيقيا.

تأطير العدد x يعني إيجاد عددين حقيقيين a و b مع $a < b$ بحيث:
 $a \leq x \leq b$ أو $a < x < b$ أو $a \leq x < b$ أو $a < x \leq b$
العدد الحقيقي الموجب قطعاً $b - a$ يسمى سعة التأطير
و العددين a و b هما محددات التأطير.

VI. التقريبات والتقريبات العشرية:

التقريبات: ليكن a و x عنصرين من \mathbb{R} و r عددا حقيقيا موجبا قطعاً.

- إذا كان $a \leq x \leq a+r$ نقول إن a قيمة مقربة للعدد x بالدقة r بتقريب.
- إذا كان $a-r \leq x \leq a$ نقول إن a قيمة مقربة للعدد x بالدقة r بإفراط.
- إذا كان $|x-a| \leq r$ نقول إن a قيمة مقربة (أو بالتقريب) للعدد x بالدقة r .

خاصية: إذا كان $a \leq x \leq b$ تأطيرا للعدد x فان:

○ العدد a قيمة مقربة للعدد x بالدقة $b - a$ بتقريب. و العدد b قيمة مقربة للعدد x بالدقة $b - a$ بإفراط.

○ العدد $\frac{a+b}{2}$ قيمة مقربة للعدد x بالدقة $\frac{b-a}{2}$.

مثال: من التأطير $2,645 \leq \sqrt{7} \leq 2,646$ نستنتج أن:

○ العدد $2,645$ قيمة مقربة للعدد $\sqrt{7}$ بالدقة 10^{-3} بتقريب.

○ العدد $2,646$ قيمة مقربة للعدد $\sqrt{7}$ بالدقة 10^{-3} بإفراط.

○ العدد $2,6455$ قيمة مقربة للعدد $\sqrt{7}$ بالدقة 5×10^{-4} بتقريب.

● التقريب العشري لعدد حقيقي والجزء الصحيح لعدد حقيقي:

لكل عدد حقيقي x يوجد عدد صحيح نسبي و حيد p بحيث:

$p \leq x < p+1$ و p يسمى الجزء الصحيح للعدد x و نكتب: $E(x) = p$

مثال: لدينا: $1 \leq \sqrt{2} < 2$ و منه فان $E(\sqrt{2}) = 1$

I. تعريف: ليكن a و b عددين حقيقيين.

(1) نقول إن a أصغر من أو يساوي b و نكتب $a \leq b$ إذا كان $(b-a) \in \mathbb{R}^+$

(2) نقول إن a أكبر من أو يساوي b و نكتب $a \geq b$ إذا كان $(a-b) \in \mathbb{R}^+$

(3) نقول إن a أصغر قطعاً من b و نكتب $a < b$ إذا كان $(b-a) \in \mathbb{R}_+^*$

(4) نقول إن a أكبر قطعاً من b و نكتب $a > b$ إذا كان $(a-b) \in \mathbb{R}_+^*$

ذن: لمقارنة عددين حقيقيين نحسب الفرق وندرس اشارته

مثال: $a \in \mathbb{R}$ قارن: $2a$ و $a^2 + 1$

الجواب: $(a^2 + 1) - 2a = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2 \geq 0$

ومنه $a^2 + 1 \geq 2a$ مهما يكن $a \in \mathbb{R}$

II. خاصيات: لنكن a و b و c و d أعدادا حقيقية.

خاصية 1: إذا كان $a \leq b$ و $b \leq c$ فان $a \leq c$

ملحوظة: إذا كان $a \leq b$ و $b < c$ فان $a < c$

الخاصية (1) تعني أنه لمقارنة a و c يكفي مقارنة a و b مع نفس العدد b .

خاصية الترتيب و الجمع:

$a \leq b$ يكافئ $a + c \leq b + c$

■ إذا كان $a \leq b$ و $c \leq d$ فان $a + c \leq b + d$

■ إذا كان $a \geq 0$ و $b \geq 0$ فان $a + b \geq 0$ و $ab \geq 0$.

خاصية الترتيب و الضرب:

■ إذا كان $c > 0$, فان: $a \leq b$ يكافئ $ac \leq bc$

■ إذا كان $c < 0$, فان: $a \leq b$ يكافئ $ac \geq bc$

■ إذا كان $0 \leq a \leq b$ و $0 \leq c \leq d$ فان $0 \leq ac \leq bd$

■ إذا كان $a \leq 0$ و $b \leq 0$ فان $a + b \leq 0$ و $ab \geq 0$.

خاصية الترتيب و المقلوب: a و b عدنان حقيقيان غير منعدمين و لهما نفس

إشارة ($ab > 0$) $a \leq b$ يكافئ $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$

إذا كان $a \leq b$ و $c < d$ فان $a + c < b + d$.

خاصية الترتيب و المربع- الترتيب و الجذر المربع:

a و b عدنان حقيقيان موجبان.

$a \leq b$ يكافئ $a^2 \leq b^2$ و $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

ولكل $a \in \mathbb{R}$: $a^2 \geq 0$

ملحوظة: جميع الخاصيات السابقة تبقى صحيحة اذا عوضنا الرمز \leq بأحد الرموز: \geq أو $<$ أو $>$.

إذا كان $a \leq 0$ و $b \leq 0$ فان $a \leq b$ يكافئ $a^2 \geq b^2$

III. القيمة المطلقة و خاصياتها:

(1) إذا كان $x \geq 0$ فان: $|x| = x$ و إذا كان $x \leq 0$ فان: $|x| = -x$

مثال: $|3| = 3$ و $|-3| = -(-3) = 3$ و $|1-\sqrt{3}| = -(1-\sqrt{3}) = -1 + \sqrt{3}$

(2) خاصيات:

● لكل x من \mathbb{R} لدينا $|x| \geq 0$ و $|x^2| = |x|^2 = x^2$ و $|x| \leq x \leq |x|$

● لكل x من \mathbb{R} لدينا: $|x| = |-x|$ و $\sqrt{x^2} = |x|$

● لكل x و y من \mathbb{R} لدينا: $|xy| = |x||y|$ و $|x+y| \leq |x| + |y|$

● إذا كان $y \neq 0$ فان: $\frac{|x|}{|y|} = \left| \frac{x}{y} \right|$

● لكل $a \in \mathbb{R}^*$ يكافئ $|x| = a$ أو $x = a$ أو $x = -a$.

● لكل x و y من \mathbb{R} لدينا: $|x| = |y|$ يكافئ $x = y$ أو $x = -y$.