

ملخص درس المستقيم في المستوى

مثال: نعتبر في الأساس (\vec{i}, \vec{j}) المتجهين $\vec{u}(3, -2)$ و $\vec{v}(-6, 4)$
هل \vec{u} و \vec{v} مستقيمتين؟ الجواب: نحسب المحددة:

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \times 4 - (-6) \times (-2) = 12 - 12 = 0$$

ومنه \vec{u} و \vec{v} مستقيمتين

6) مستقيم معرف بنقطة و متجهة: تعريف: ليكن (D) مستقيما يمر من

نقطتين مختلفتين A و B . كل متجهة \vec{u} غير منعدمة و مستقيمة مع المتجهة \vec{AB} تسمى متجهة موجهة للمستقيم (D) . نقول كذلك أن (D) يمر من A و

موجه بالمتجهة \vec{u} ولدنيا كذلك \vec{AB} متجهة موجهة للمستقيم (AB) .

مثال: نعتبر المستقيم (D) الذي معادلته $y = x - 1$ حدد متجهة موجهة ل (D)

الجواب: النقطتان $A(1; 0)$ و $B(0; -1)$ تنتميان إلى (D) .

إذن: $(-1; -1)$ متجهة موجهة للمستقيم (D) .

تعريف: لنكن A نقطة من المستوى و \vec{u} متجهة غير منعدمة.

مجموعة النقط M من المستوى التي تحقق $\vec{AM} = t\vec{u}$ حيث $t \in \mathbb{R}$

هي المستقيم المار من A و الموجه بالمتجهة \vec{u} . و نكتب $D(A; \vec{u})$

تمثيل بارامترى لمستقيم: مثال: نعتبر النقطة $A(3; -5)$ و المتجهة $(-2; 3)$

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -5 + 3t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R}) \text{ الجواب: } D(A; \vec{u})$$

7) معادلة ديكارتية لمستقيم في المستوى:

خاصية: ليكن (O, \vec{i}, \vec{j}) معلما. كل مستقيم (D) في المستوى له معادلة

على الشكل $ax + by + c = 0$ حيث $a \neq 0$ أو $b \neq 0$ هي معادلة

ديكارتية للمستقيم (D) . $\vec{u}(-b; a)$ متجهة موجهة ل (D)

مثال 1: نعتبر في المعلم المتعامد المنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) النقط

$A(2; 4)$ و $B(5; -1)$ حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (AB) .

الجواب: طريقة 1: $M(x, y) \in (AB)$ يعني \vec{AM} و \vec{AB} مستقيمتين

$$\det(\vec{AM}; \vec{AB}) = 0 \text{ يعني } \begin{vmatrix} x-2 & 3 \\ y-4 & -5 \end{vmatrix} = 0 \text{ لأن: } \vec{AM}(x-2, y-4) \text{ و } \vec{AB}(3, -5)$$

يعني $0 = -5(x-2) - 3(y-4) = -5x + 10 - 3y + 12 = -5x - 3y + 22$

طريقة 2: نعلم أن معادلة مستقيم تكتب على الشكل $(AB) ax + by + c = 0$

ونعلم أن $\vec{AB}(3, -5)$ متجهة موجهة له: $\vec{AB}(-b, a)$

إذن: $-b = 3$ و $a = -5$ إذن: $b = -3$ و $a = -5$

ومنه: $-5x - 3y + c = 0$ (بجانب البحث عن c)

نعلم أن: $A \in (AB)$ إذن احداثياته تحقق المعادلة:

$$-5 \times 2 - 3 \times 4 + c = 0 \text{ يعني: } c = 22 \text{ ومنه: } -5x - 3y + 22 = 0 \text{ (AB)}$$

8) الأوضاع النسبية لمستقيمين:

خاصية: نعتبر المستقيمين $(D): ax + by + c = 0$ و $(\Delta): dx + b'y + c' = 0$

(D) و (Δ) متوازيان إذا و فقط إذا كان: $ab' - a'b = 0$

و إذا كان $axb' - d'xb \neq 0$ فإن: (D) و (Δ) متقاطعان ويمكن تحديد نقطة

التقاطع بحل النظمة المكونة من معادلتى (D) و (Δ)

1) أساس مستوى - معلم مستوى: تعريف: إذا كانت \vec{i} و \vec{j} متجهتين غير مستقيمتين فإن الزوج (\vec{i}, \vec{j}) يسمى أساسا للمستوى.

تعريف: إذا كانت O نقطة من المستوى و (\vec{i}, \vec{j}) أساسا للمستوى فإن

(O, \vec{i}, \vec{j}) هو معلم في المستوى.

2) إحداثيات نقطة: ليكن (O, \vec{i}, \vec{j}) معلما بحيث $\vec{OI} = \vec{i}$ و $\vec{OJ} = \vec{j}$ لكل

نقطة M من المستوى يوجد زوج وحيد (x, y) بحيث: $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

و الزوج (x, y) هو إحداثيتي النقطة M في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) و نكتب $M(x, y)$

مثال: في مثلث ABC إذا كانت $\vec{AM} = 3\vec{AB} - 2\vec{AC}$

فإن زوج إحداثيتي النقطة M في المعلم $(\vec{A}, \vec{AB}, \vec{AC})$ هو $(3, -2)$.

3) إحداثيات متجهة: ليكن (\vec{i}, \vec{j}) أساسا للمستوى. لكل متجهة \vec{u} يوجد زوج

وحيد (x, y) بحيث $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ و الزوج (x, y) يسمى زوج إحداثيتي

المتجهة \vec{u} و نكتب $\vec{u}(x, y)$ وإذا كان $\vec{u}(x, y)$ و $\vec{u}'(x', y')$ فإن:

$$\vec{u} = \vec{u}' \text{ تكافئ } x = x' \text{ و } y = y'$$

خاصية: ليكن (O, \vec{i}, \vec{j}) معلما. إذا كانت $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ فإن:

$$\vec{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$$

مثال: إذا كانت $A(1, -4)$ و $B(-3, 7)$ فإن $\vec{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$

أي أن $\vec{AB}(-4, 11)$ وبالتالي $\vec{AB}(-3 - 1, 7 - (-4))$

$$\text{ومنه: } \vec{AB} = -4\vec{i} + 11\vec{j}$$

4) إحداثيات مجموع متجهتين - إحداثيات ضرب متجهة في عدد حقيقي:

مثال: نعتبر في الأساس (\vec{i}, \vec{j}) المتجهين $\vec{u}(3, -2)$ و $\vec{v}(-5, 1)$

حدد زوج إحداثيتي المتجهات التالية: $\vec{u} + \vec{v}$ و $5\vec{u}$ و $3\vec{u} - 2\vec{v}$

الأجوبة: $\vec{u}(3, -2)$ يعني $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ و $\vec{v}(-5, 1)$ يعني $\vec{v} = -5\vec{i} + \vec{j}$

ومنه: $\vec{u} + \vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - 5\vec{i} + \vec{j} = -2\vec{i} - \vec{j}$ أي: $\vec{u} + \vec{v}(-2, -1)$

زوج إحداثيتي المتجهة $5\vec{u}$ هو $(5 \times 3, 5 \times (-2))$ أي $5\vec{u}(15, -10)$

$3\vec{u} - 2\vec{v}(19, -8)$ أي: $3\vec{u} - 2\vec{v} = 9\vec{i} - 6\vec{j} + 10\vec{i} - 2\vec{j} = 19\vec{i} - 8\vec{j}$

خاصية: إذا كانت $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$

و M منتصف القطعة $[AB]$ فإن: $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

خاصية: ليكن (O, \vec{i}, \vec{j}) معلما متعامدا منظما. إذا كانت:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \text{ فإن: } B(x_B, y_B) \text{ و } A(x_A, y_A)$$

5) شرط استقامة متجهتين: خاصية و تعريف: لنكن $\vec{u}(x, y)$ و $\vec{u}'(x', y')$

متجهتين من المستوى المنسوب إلى الأساس (\vec{i}, \vec{j})

\vec{u} و \vec{u}' مستقيمتان إذا و فقط إذا كان: $xy' - x'y = 0$

العدد $xy' - x'y$ يسمى محددة المتجهتين \vec{u} و \vec{u}' بالنسبة للأساس (\vec{i}, \vec{j})

و نكتب: $\det(\vec{u}, \vec{u}') = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$