

ملخص درس الاشتقاق

I. قابلية اشتقاق دالة عديدة فى نقطة

1تعريف : لتكن f دالة عديدة معرفة على مجال مفتوح I

و a عنصرا من I

نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق فى النقطة a إذا وجد عدد حقيقي l

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$$

بحيث : l يسمى العدد المشتق للدالة فى النقطة a و نرسم له بالرمز : $f'(a)$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

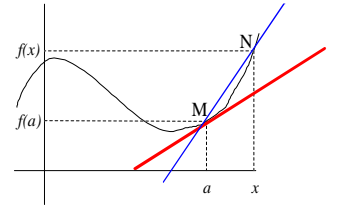
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

2التاويل الهندسي للعدد المشتق - معادلة مماس لمنحنى دالة فى نقطة

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق فى نقطة a و (C_f) منحناها فى معلم متعامد

منظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.



المستقيم (Δ) المار من النقطة $M(a; f(a))$

و الذي معاملته الموجه هو $f'(a)$ يسمى المماس للمنحنى

في النقطة M (C_f)

خاصية : لتكن f دالة قابلة للاشتقاق فى نقطة a

معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) فى النقطة $M(a; f(a))$ هي :

$$(\Delta) : y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = x^2 - 2x + 1$

1. باستعمال التعريف بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 2$

2. حدد معادلة المماس للمنحنى الممثل للدالة f عند $x_0 = 2$.

$$f(2) = 2^2 - 2 \times 2 + 1 = 1 \quad \text{الجواب (1):}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x + 1 - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x - 2}$$

$$x_0 = 1 = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} x = 2$$

$2 = f'(2)$ وهو العدد المشتق عند $x_0 = 2$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (2)$$

$$y = 2x - 3 \Leftrightarrow y = 1 + 2(x - 2) \Leftrightarrow y = f(2) + f'(2)(x - 2)$$

II. الاشتقاق على اليمين - الاشتقاق على اليسار

مثال : نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = x^3 + |x|$

$$1. \text{ أحسب } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \text{ قابلية اشتقاق الدالة } f \text{ على اليمين عند } (x_0 = 0)$$

$$2. \text{ أحسب } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \text{ قابلية اشتقاق الدالة } f \text{ على اليسار عند } (x_0 = 0)$$

3. هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 0$ ؟

4. حدد معادلة لنصف مماس المنحنى الممثل للدالة f

على اليمين عند $x_0 = 0$.

5. حدد معادلة لنصف مماس المنحنى الممثل للدالة f

على اليسار عند $x_0 = 0$.

6. كيف نسمي النقطة $A(0, f(0))$ ؟

$$\text{الجواب : } \begin{cases} f(x) = x^3 + x; x \geq 0 \\ f(x) = x^3 - x; x \leq 0 \end{cases} \text{ و } f(0) = 0^3 + |0| = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 + x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x^2 + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + 1 = 1 \quad (1)$$

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0 = 0$ و $1 = f'_d(0)$

وهو العدد المشتق على اليمين عند $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 - x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x^2 - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 - 1 = -1 \quad (2)$$

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0 = 0$ و $-1 = f'_g(0)$

وهو العدد المشتق على اليسار عند $x_0 = 0$

3) f قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار عند $x_0 = 0$

ولكن : $f'_d(0) \neq f'_g(0)$

ومنه : f غير قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 0$

4) معادلة نصف مماس منحنى الدالة f على اليمين عند $x_0 = 0$.

$$y = f(x_0) + f'_d(x_0)(x - x_0)$$

$$(\Delta_d) : y = x \Leftrightarrow y = 0 + 1(x - 0) \Leftrightarrow y = f(0) + f'_d(0)(x - 0)$$

5) معادلة نصف مماس منحنى الدالة f على اليسار عند $x_0 = 0$.

$$y = f(x_0) + f'_g(x_0)(x - x_0)$$

$$(\Delta_g) : y = -x \Leftrightarrow y = 0 - 1(x - 0) \Leftrightarrow y = f(0) + f'_g(0)(x - 0)$$

6) لدينا $f'_d(0) \neq f'_g(0)$ النقطة $A(0; f(0))$ تسمى نقطة مزواة

خاصية: لتكن f دالة عديدة معرفة

على مجال مفتوح I و a عنصرا من I

f قابلة للاشتقاق على النقطة a تكافئ f قابلة

للاشتقاق على اليمين فى النقطة a و f قابلة للاشتقاق على اليسار فى

$$\text{النقطة } a \text{ و } f'_g(a) = f'_d(a)$$

III. الدالة المشتقة لدالة عديدة

1. الاشتقاق على مجال

تعريف: f دالة عديدة معرفة على مجال مفتوح I نقول إن الدالة f

قابلة للاشتقاق على المجال I إذا كانت f قابلة للاشتقاق فى كل

نقطة من I

2. الدالة المشتقة

لتكن f دالة عديدة معرفة على مجال I الدالة المشتقة للدالة f

هي الدالة التي نرسم لها بالرمز $f'(x)$ و المعرفة كما يلي : $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \rightarrow f'(x)$

IV. جدول للدوال المشتقة لدوال اعتيادية و العمليات حول الدوال المشتقة

الدالة المشتقة f'	لدالة
$f'(x) = 0$	$f(x) = k$
$f'(x) = 1$	$f(x) = x$
$f'(x) = a$	$f(x) = ax$
$f'(x) = a$	$f(x) = ax + b$
$f'(x) = nx^{n-1} \quad n \in \mathbb{Z}^*$	$f(x) = x^n$
$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$f(x) = \frac{1}{x}$
$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f(x) = \sqrt{x}$
$f'(x) = -\sin x$	$f(x) = \cos x$
$f'(x) = \cos x$	$f(x) = \sin x$
$f'(x) = -a \sin(ax+b)$	$f(x) = \cos(ax+b)$
$f'(x) = a \cos(ax+b)$	$f(x) = \sin(ax+b)$
$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$f(x) = \tan x$

الدالة المشتقة f'	الدالة
$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$f(x) = \tan x$
$f'(x) = u' + v'$	$f(x) = u + v$
$f'(x) = u' - v'$	$f(x) = u - v$
$f'(x) = ku'$	$f(x) = ku$
$f'(x) = u' \times v + u \times v'$	$f(x) = u \times v$
$f'(x) = nu^n \times u'$	$f(x) = u^n$
$f'(x) = -\frac{u'}{u^2}$	$f(x) = \frac{1}{u}$
$f'(x) = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$	$f(x) = \frac{u}{v}$
$f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$f(x) = \sqrt{u}$

V. الدالة المشتقة الثانية-المشتقات المتتالية

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x) = x^3 - 5x^2 + 4x - 2$
أحسب المشتقة الأولى و الثانية و الثالثة

الجواب:

$$f'(x) = (x^3 - 5x^2 + 4x - 2)' = 3x^2 - 5 \times 2x^1 + 4 - 0 = 3x^2 - 10x + 4$$

$$f''(x) = (3x^2 - 10x + 4)' = 6x - 10 \quad \text{و} \quad f'''(x) = (6x - 10)' = 6$$

VI. تطبيقات الدالة المشتقة:

1. رتبة دالة وإشارة مشتقاتها

خاصية: لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق على مجال I

• f تزايدية على مجال I يعني $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$

• f تناقصية على مجال I يعني $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$

• f ثابتة على مجال I يعني $f'(x) = 0 \quad \forall x \in I$

2. مطايف دالة قابلة للاشتقاق

خاصية 1: لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I

و a عنصرا من I

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق في النقطة a وتقبل مطرافا

في النقطة a فإن $f'(a) = 0$

خاصية 2: لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I و a

عنصرا من I

إذا كانت f' تنعدم في النقطة a تتغير إشارتها

فان $f(a)$ مطرافا للدالة f

3. حل معادلة تفاضلية

تعريف: ليكن ω عددا حقيقيا غير منعدم.

• المعادلة $y'' + \omega^2 y = 0$ ذات المجهول الدالة y حيث y''

مشتقتها الثانية تسمى معادلة تفاضلية.

• كل دالة f قابلة للاشتقاق مرتين على \mathbb{R}

وتحقق المتساوية: $f''(x) + \omega^2 f(x) = 0$ لكل x من \mathbb{R}

تسمى حلا للمعادلة التفاضلية $y'' + \omega^2 y = 0$.

خاصية: ليكن ω عددا حقيقيا غير منعدم.

الحل العام للمعادلة التفاضلية $y'' + \omega^2 y = 0$ هو مجموعة

الدوال y المعرفة كما يلي: $y: x \rightarrow \alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x$

حيث $\alpha \in \mathbb{R}$ و $\beta \in \mathbb{R}$

ملحوظة: حل المعادلة التفاضلية: $y'' + \omega^2 y = 0$

يعني تحديد الحل العام للمعادلة.

مثال: حل المعادلة التفاضلية التالية: $y'' + 16y = 0$

الجواب: $y'' + 4^2 y = 0 \Leftrightarrow y'' + 16y = 0$

ومنه الحل العام للمعادلة التفاضلية $y'' + 16y = 0$

هو مجموعة الدوال y المعرفة كما يلي: $y: x \rightarrow \alpha \cos 4x + \beta \sin 4x$

حيث $\alpha \in \mathbb{R}$ و $\beta \in \mathbb{R}$