ملخص درس المنطق

العبارات: نسمي عبارة كل نص رياضي يحمل معنى يكون إما صحيحا و إما خاطئا و نرمز عادة لعبارة بأحد الرموز p أو q أو r ......

غالبا ما نعبر عن حقيقة عبارة بجدول يسمى جدول حقيقة عبارة : الرمز 1 يعني أن العبارة p صحيحة و الرمز 0 يعني أن العبارة p خاطئة

العمليات على العبارات:

1)نفي عبارة: نرمز لنفي العبارة p بالرمز $\overline{p}$ وتكون صحيحة إذا كانت p خاطئة و تكون خاطئة إذا كانت p صحيحة

وجدول حقيقة عملية النفي هو : **الجدول 1**

2)عطف عبارتين: عطف عبارتين p و q هو العبارة التي نرمز لها بالرمز : $(p$ و $q)$ والتي تكون صحيحة فقط ا إذا كانت العبارتان p و q صحيحتين معا

و جدول حقيقة العطف المنطقي هو : **الجدول 2**

3)فصل عبارتين: فصل عبارتين p و q هو العبارة التي نرمز لها بالرمز : $(p$ أو $q)$ والتي تكون خاطئة فقط إذا كانت العبارتان p و q خاطئتين معا

و جدول حقيقة الفصل المنطقي هو : **الجدول 3**

4)استلزام عبارتين: استلزام عبارتين p و q هو العبارة التي نرمز لها بالرمز : $(p\Rightarrow q)$ والتي تكون خاطئة فقط ادا كانت p صحيحة و q خاطئة

وجدول حقيقة الاستلزام المنطقي هو : **الجدول 4**

ملاحظات: العبارة: $(p\Rightarrow q)$ تقرأ : " p تستلزم q " أو " ادا كانت p فان q "

العبارة : $(q\Rightarrow p)$ تسمى الاستلزام العكسي للاستلزام $(p\Rightarrow q)$

للبرهان أن العبارة : $(p\Rightarrow q)$ صحيحة نفترض أن العبارة p صحيحة و نبين أن العبارة q صحيحة

نتيجة: العبارتان $(p\Rightarrow q)$ و $\overline{p}$ أو q متكافئتان

5)تكافؤ عبارتين: تكافؤ عبارتين p و q هو العبارة التي نرمز لها بالرمز : $(p\Leftrightarrow q)$ والتي تكون صحيحة فقط إذا كانت العبارتان p و q صحيحتين معا أو خاطئتين معا. وجدول حقيقة الاستلزام المنطقي هو : **الجدول5**

العبارة : $(p\Leftrightarrow q)$ تقرأ : " p تكافئ q "

جدول5 هوحقيقة التكافؤ المنطقي

خاصية : العبارتان $(p\Leftrightarrow q)$ و $[(p\Rightarrow q)$ و $(q\Rightarrow p)]$ متكافئتان

الدالة العبارية: نسمي دالة عبارية كل نص رياضي يحتوي على متغير (أو عدة متغيرات) ينتمي إلى مجموعة معلومة E حيث تصبح عبارة كلما عوضنا المتغير بعنصر من E ونرمز عادة لدالة عبارية بالرمز $A(x)$ أو $B(x)$ أو $A(x;y)$

العبارات المكممة: انطلاقا من الدالة العبارية $A(x)$ نكون العبارة " $\exists x\in E, A(x)$ " ونقرأ : " يوجد على الأقل x من E يحقق الخاصية $A(x)$ " وتكون العبارة " $\exists x\in E, A(x)$ " صحيحة إذا وجد على الأقل x من E يحقق الخاصية $A(x)$

انطلاقا من الدالة العبارية $A(x)$ نكون العبارة " $\forall x\in E, A(x)$ " ونقرأ : "مهما يكن x من E لدينا $A(x)$"

وتكون العبارة " $\forall x\in E, A(x)$ " صحيحة إذا كانت جميع عناصر E تحقق الخاصية $A(x)$.

خاصية : نفي العبارة " $\forall x\in E, A(x)$ "هو العبارة " $\exists x\in E, \overline{A(x)}$ "

نفي العبارة " $\exists x\in E, A(x)$ " هو العبارة " $\forall x\in E, \overline{A(x)}$ "

p	$\overline{p}$
1	0
0	1

الجدول 1

p	q	p و q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

الجدول 2

p	q	p أو q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

الجدول 3

p	q	$(p\Rightarrow q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

الجدول 4

p	q	$(p\Leftrightarrow q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

الجدول 5

p	q	$p\Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

I. المكممات

1.العبارات المكممة

انطلاقا من الدالة العبارية $A(x)$ نكون العبارة " $\exists x\in E, A(x)$ " ونقرأ : " يوجد على الأقل x من E يحقق الخاصية $A(x)$ " وتكون العبارة " $\exists x\in E, A(x)$ " صحيحة إذا وجد على الأقل x من E يحقق الخاصية $A(x)$

انطلاقا من الدالة العبارية $A(x)$ نكون العبارة " $\forall x\in E, A(x)$ " ونقرأ : " مهما يكن x من E لدينا $A(x)$ " وتكون العبارة " $\forall x\in E, A(x)$ " صحيحة إذا كانت جميع عناصر E تحقق الخاصية $A(x)$.

<u>مثال1:</u> حدد قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية :

1. $\forall x \in \mathbb{R} / x \geq 0$
2. " $\exists x \in \mathbb{N}, 2x-4=0$ "
3. " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2+1=0$
4. $(\forall n \in \mathbb{N}); \sqrt{n} \in \mathbb{N}$
5. $(\exists x \in \mathbb{Z}); \frac{x}{4} \in \mathbb{Z}$

<u>الأجوبة:</u> 1) صحيحة 2) صحيحة 3) خاطئة 4) خاطئة 5) صحيحة

<u>مثال2:</u> حدد العبارة النافية للعبارات الآتية :

1) $(\forall n \in \mathbb{N}); \sqrt{n} \in \mathbb{N}$ 2) $x^2-2=0$ و $(\exists x \in \mathbb{Z}): \frac{x}{4} \in \mathbb{Q}$

3) توجد نافذة في المؤسسة مكسورة

4) كل الأشجار غير مثمرة في المؤسسة

<u>الأجوبة:</u> 1) $(\exists n \in \mathbb{N}); \sqrt{n} \notin \mathbb{N}$

2) $x^2-2 \neq 0$ أو $(\forall x \in \mathbb{Z}): \frac{x}{4} \notin \mathbb{Q}$

3) كل نوافذ المؤسسة غير مكسورة

4) توجد شجرة مثمرة في المؤسسة

II. الاستدلالات الرياضية

1. الاستدلال الاستنتاجي :

<u>مثال :</u> ليكن $x \in \mathbb{R}$ بين أن : $\sqrt{2} < x < 5 \Rightarrow 3 < x^2+1 < 26$

الأجوبة :نفترض أن : $\sqrt{2} < x < 5$ ونبين أن : $3 < x^2+1 < 26$

لدينا : $\sqrt{2} < x < 5$ اذن : $2 < x^2 < 25$

اذن : $3 < x^2+1 < 26$

ومنه : $\sqrt{2} < x < 5 \Rightarrow 3 < x^2+1 < 26$

2. الاستدلال بالمثال المضاد :

<u>مثال</u> : بين العبارة التالية خاطئة مع تعليل الجواب:

$$p \ \left(\forall x \in \mathbb{R}^*\right); x + \frac{1}{x} \geq 2 \text{ "}$$

الجواب : نعتبر : $x=-2$ لدينا : $-2 + \frac{1}{-2} = -\frac{5}{2} < 2$ اذن : p خاطئة

3. الاستدلال بالتكافؤ:

<u>مثال:</u> بين أن : $(\forall a \in \mathbb{R}); (\forall b \in \mathbb{R}) \quad a^2+b^2 \geq 2ab$

الجواب :نستعمل الاستدلال بالتكافؤ:

$$a^2+b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow a^2+b^2-2ab \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$$

و هذا صحيح لأن المربع دائما موجب

وبالتالي : $(\forall a \in \mathbb{R}); (\forall b \in \mathbb{R}) \quad a^2+b^2 \geq 2ab$

4. الاستدلال بفصل الحالات :

<u>مثال:</u> باستعمال الاستدلال بفصل الحالات :حل في $\mathbb{R}$ المعادلة :

$$(E): |3x-6| = 1$$

الجواب :ندرس اشارة : $3x-6$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
”$3x-6$	$-$	0	$+$

الحالة 1: اذا كانت : $x \geq 2$ فان : $3x-6 \geq 0$ ومنه :

$$(E): |3x-6| = 1$$

$$x = \frac{7}{3} \in S \Leftrightarrow 3x = 7 \Leftrightarrow 3x-6 = 1 \Leftrightarrow$$

الحالة 2: اذا كانت : $x \leq 2$ فان : $3x-6 \leq 0$ ومنه :

$$(E): |3x-6| = 1$$

$$x = \frac{5}{3} \in S \Leftrightarrow -3x = -5 \Leftrightarrow -3x+6 = 1 \Leftrightarrow -(3x-6) = 1 \Leftrightarrow$$

ومنه مجموعة الحلول هي : $S = \left\{\frac{5}{3}; \frac{7}{3}\right\}$

5. الاستدلال بالخلف :

لكي نبرهن أن عبارة صحيحة نفترض أن العبارة خاطئة ونحاول الحصول على تناقض مع المعطيات

<u>مثال1:</u> بين باستعمال الاستدلال بالخلف أن : $\forall x \in \mathbb{R} / \frac{x^2-1}{x^2+1} \neq 1$

الجواب : نفترض أن : $\exists x \in \mathbb{R} / \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1$

يعني $x^2-1 = x^2+1$ يعني $-1 = +1$ وهذا غير صحيح

ومنه ما افترضناه كان خاطئا أي : $\forall x \in \mathbb{R} / \frac{x^2-1}{x^2+1} \neq 1$