

مستوى : السنة الثانية من سلك البكالوريا

شعبة العلوم التجريبية

- مسلك علوم الحياة و الأرض
- مسلك العلوم الفيزيائية
- مسلك العلوم الزراعية

مذكرة رقم 1 في درس اتصال دالة محدبة 8 س

محتوى البرنامج

- الاتصال في نقطة
- الاتصال على اليمين واليسار
- الاتصال على مجال: (حالة دالة حدودية ودالة جذرية ودالة مثلثية والدالة $(x \rightarrow \sqrt{x})$)
- صورة قطعة أو مجال : (بدالة متصلة ؛ بدالة متصلة ورتيبة قطعا)
- مبرهنة القيم الوسيطة حالة دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال
- الدالة العكسية لدالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال

القدرات المنتظرة

- تحديد صورة قطعة و مجال بدالة متصلة وبدالة متصلة ورتيبة قطعا
- تطبيق مبرهنة القيم الوسيطة في حل بعض المعادلات والمتراجحات أو دراسة إشارة بعض التعبيرات

التوجيهات التربوية

- يتم اعتماد التعريف التالي : نقول إن دالة f متصلة في نقطة x_0 إذا كان

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

- تقل النتائج المتعلقة باتصال الدوال الحدودية و الجذرية و المتلينة و الدالة $x \rightarrow \sqrt{x}$ و يتم التركيز على تطبيقاتها ؛

- نقل أن صورة قطعة بدالة متصلة هي قطعة و أن صورة مجال هي أيضا مجال ثم تستنتج مبرهنة القيم الوسيطة ؛

- نقل أن $f + g$ و fg و λf و $f \circ g$ دوال متصلة على مجال I إذا كانت f و g متصلتين على I ؛

I. الاتصال في نقطة و الاتصال على مجال

1. الاتصال في نقطة

تعريف : لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و x_0

عنصرا من I

نقول إن الدالة f متصلة في النقطة x_0 إذا كان

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

مثال 1: لتكن f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} ; x \neq 2 \\ f(2) = 4 \end{cases}$$

الجواب: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2^2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)}$

ومنه f دالة متصلة عند $x_0 = 2$: $\lim_{x \rightarrow 2} x + 2 = 4 = f(2)$

مثال 2: لتكن f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :

$$\text{أدرس اتصال الدالة } f \text{ في النقطة } x_0 = 1 \quad \begin{cases} f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}, x \neq 1 \\ f(1) = 4 \end{cases}$$

الجواب: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$

نعلم أن : $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$$\text{ومنه : } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 + x + 1 = 3 \neq f(1)$$

ومنه f دالة غير متصلة عند $x_0 = 1$ أو منقطعة عند $x_0 = 1$

تمرين 1: لتكن f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :

$$\text{أدرس اتصال الدالة } f \text{ في النقطة } x_0 = 2 \quad \begin{cases} f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}, x \neq 2 \\ f(2) = 12 \end{cases}$$

الجواب: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2^3}{x - 2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \neq f(0)$$

ومنه f غير متصلة على اليمين عند $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 - x + 1 = 1 = f(0)$$

ومنه f متصلة على اليسار عند $x_0 = 0$

(2) نلاحظ أن f غير متصلة على اليمين و متصلة على اليسار

عند $x_0 = 0$

ومنه f غير متصلة عند $x_0 = 0$

تمرين 2: لتكن f الدالة العددية المعرفة على بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = ax^2 + 2x + 3, & x \leq 2 \\ f(x) = \frac{x+3}{x-1}, & x > 2 \end{cases}$$

حدد العدد الحقيقي a علما أن الدالة f متصلة في النقطة $x_0 = 2$

$$f(2) = a \times 2^2 + 2 \times 2 + 3 = 4a + 7$$

نعلم أن f متصلة في النقطة $x_0 = 2$

ومنه f متصلة على اليمين و متصلة على اليسار عند $x_0 = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+3}{x-1} = 4a + 7 \quad \text{اذن} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) \end{cases}$$

$$\text{يعني : } 5 = 4a + 7 \text{ يعني : } -2 = 4a \text{ يعني : } a = -\frac{1}{2}$$

4. الاتصال على مجال

تعريف: نقول إن f دالة متصلة على مجال مفتوح I إذا كانت متصلة

في كل نقطة x_0 من I

نقول إن f دالة متصلة على مجال $[a; b]$ إذا كانت متصلة على

مجال $[a; b]$ و متصلة

على اليمين في النقطة a و على اليسار في النقطة b

اتصال الدوال الاعتيادية:

➤ الدوال الحدودية متصلة على \mathbb{R}

➤ الدوال \sin و \cos متصلة على \mathbb{R}

➤ الدوال الجذرية و الدالة \tan متصلة على مجموعة تعريفها

➤ الدالة $\sqrt{x} \rightarrow x$ متصلة على مجموعة تعريفها

مثال: أدرس اتصال الدوال المعرفة كالتالي:

$$g(x) = \frac{6x^5 - 7x}{x-3}, \quad f(x) = x^4 - 6x + 9$$

$$h(x) = \sin x + 2 \cos x$$

الجواب: f دالة حدودية اذن متصلة على \mathbb{R}

g دالة جذرية اذن متصلة على مجموعة تعريفها

نحدد مجموعة تعريف الدالة g

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} / x-3 \neq 0\}$$

$$D_g = \mathbb{R} - \{3\} \text{ ومنه } x=3 \text{ يعني } x-3=0$$

وبالتالي g دالة متصلة على $\mathbb{R} - \{3\}$

h دالة مكونة من دوال متصلة على \mathbb{R} اذن h متصلة على \mathbb{R}

تمرين 3: أدرس اتصال الدوال المعرفة كالتالي:

$$h(x) = \sqrt{3x+9} \quad (3) \quad g(x) = \frac{3x+1}{2x^2-x-1} \quad (2) \quad f(x) = x^2 - 16x + 1 \quad (1)$$

الجواب (1): f دالة حدودية اذن متصلة على \mathbb{R}

(2) g دالة جذرية اذن متصلة على مجموعة تعريفها

نحدد مجموعة تعريف الدالة g

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \quad \text{نعلم أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + x \times 2 + 2^2)}{x-2} \quad \text{ومنه}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + x \times 2 + 2^2 = 12 = f(1)$$

ومنه f دالة متصلة عند $x_0 = 1$

2. الاتصال على اليمين و على اليسار في نقطة

نشاط: لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{|x|}; & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. أكتب صيغة الدالة دون استعمال رمز القيمة المطلقة

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

2. أحسب :

3. ماذا تلاحظ؟

الجواب (1)

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{x}; & x > 0 \\ f(x) = -\frac{x^2}{x}; & x < 0 \end{cases} \quad \text{يعني} \quad \begin{cases} f(x) = x; & x > 0 \\ f(x) = -x; & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 = f(0) \quad (2)$$

ومنه f متصلة على اليمين عند $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x = 0 = f(0)$$

ومنه f متصلة على اليسار عند $x_0 = 0$

(3) نلاحظ أن f متصلة على اليمين و متصلة على اليسار عند $x_0 = 0$

ومنه نقول f متصلة عند $x_0 = 0$

تعريف:

• لتكن f دالة عددية معرفة على مجال على الشكل $[x_0; x_0 + \alpha[$

حيث $\alpha > 0$

نقول إن الدالة f متصلة على اليمين في النقطة x_0 إذا كان

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$$

• لتكن f دالة عددية معرفة على مجال على الشكل $]x_0 - \alpha; x_0]$

حيث $\alpha > 0$

نقول إن الدالة f متصلة على اليسار في النقطة x_0 إذا كان

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$$

خاصية: لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و x_0

عنصرا من I

تكون الدالة f متصلة في النقطة x_0 إذا وفقط إذا كانت متصلة على

اليمين في النقطة x_0 و على اليسار في النقطة x_0

تمرين 2: لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sin 2x}{x} - 2, & x > 0 \\ f(x) = x^3 - x + 1, & x \leq 0 \end{cases}$$

1. أدرس اتصال الدالة f على اليمين و على اليسار في النقطة

$x_0 = 0$

2. هل الدالة f متصلة في النقطة $x_0 = 0$ ؟

$$\text{الجواب: } f(0) = 0^3 - 0 + 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 2x}{x} - 2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 \frac{\sin 2x}{2x} - 2 = 2 \times 1 - 2 = 0 \quad (1)$$

$$f([a;b]) = \left[\lim_{x \rightarrow b^-} f(x); f(b) \right] \text{ و } f([a;b]) = [f(b); f(a)]$$

$$f(]a;b]) = \left[\lim_{x \rightarrow b^-} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right] \text{ و } f(]a;b]) = \left[f(b); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right]$$

أمثلة: حدد صورة المجال I بالدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

$$1. \quad f(x) = 5x - 1 \text{ و } I = [-2; 3]$$

$$2. \quad f(x) = x^2 \text{ و } I = [-5; -3]$$

$$3. \quad f(x) = \frac{1}{x-1} \text{ و } K =]1; +\infty[\text{ و } J =]-\infty; 1[\text{ و } I = [-3; 1[$$

$$f(x) = 5x - 1 \text{ (أجوبة: 1)}$$

f دالة حدودية اذن متصلة على \mathbb{R} اذن متصلة على $I = [-2; 3]$

$$I \text{ و } f'(x) = (5x - 1)' = 5 > 0 \text{ ومنه وتزايدية قطاعا على } I$$

$$f(I) = f([-2; 3]) = [f(-2); f(3)] = [-11; 14]$$

$$f(x) = x^2 \text{ (2)}$$

f دالة حدودية اذن متصلة على \mathbb{R} اذن متصلة على $I = [-5; -3]$

$$-5 \leq x \leq -3 \text{ يعني } x \in [-5; -3] \text{ لأن } f'(x) = (x^2)' = 2x < 0$$

ومنه تناقصية قطاعا على I وبالتالي:

$$f(I) = f([-5; -3]) = [f(-3); f(-5)] = [9; 25]$$

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \text{ (3)}$$

f دالة جذرية اذن متصلة على مجموعة تعريفها

نحدد مجموعة تعريف الدالة f

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x - 1 \neq 0\}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{1\} \text{ و } x = 1 \text{ يعني } x - 1 = 0$$

$$\text{ومنه } f \text{ دالة متصلة على } D_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

وبالتالي f دالة متصلة على كل المجالات التالية:

$$K =]1; +\infty[\text{ و } J =]-\infty; 1[\text{ و } I = [-3; 1[$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x-1} \right)' = -\frac{(x-1)'}{(x-1)^2} = -\frac{1}{(x-1)^2} < 0$$

ومنه تناقصية قطاعا

$$f(I) = f([-3; 1[) = \left[\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x); f(-3) \right]$$

$$f(I) =]-\infty; -\frac{1}{4}] \text{ ومنه } f(-3) = -\frac{1}{4} \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

$$f(J) = f(]-\infty; 1]) = \left[\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right]$$

$$f(J) = f(]-\infty; 1]) =]-\infty; 0] \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \text{ لدينا}$$

$$f(K) = f(]1; +\infty[) = \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \right] =]0; +\infty[\quad K =]1; +\infty[$$

تمرين 5: حدد صورة المجال I بالدالة f في كل حالة من

الحالات التالية:

$$1. \quad f(x) = -4x + 1 \quad J = [2; +\infty[\quad I = [1; 2]$$

$$2. \quad f(x) = \frac{x-1}{2x-1} \quad K = \left] \frac{1}{2}; +\infty[\quad J =]-\infty; \frac{1}{2}[\quad \text{ و } I = [2; 6[$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} / 2x^2 - x - 1 \neq 0\}$$

$$\text{نحل المعادلة باستعمال المميز} \quad 2x^2 - x - 1 = 0$$

$$c = -1 \text{ و } b = -1 \text{ و } a = 2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 1 + 8 = 9 = (3)^2 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ و } x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{1-3}{2 \times 2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \text{ و } x_1 = \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2 \times 2} = \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\text{ومنه: } D_g = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{2}; 1 \right\}$$

وبالتالي g دالة متصلة على $D_g = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{2}; 1 \right\}$

h (3) دالة جذرية اذن متصلة على مجموعة تعريفها

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} / 3x + 9 \geq 0\}$$

$$D_h = [-3; +\infty[\text{ و } 3x + 9 \geq 0 \text{ يعني } x \geq -3$$

وبالتالي h دالة متصلة على $D_h = [-3; +\infty[$

تمرين 4:

أحسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{4x+1}{x+3}} \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi x^2 + 3x + 1}{4x^2 + 1}\right) \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{\pi x}{\sin 3x}\right)$$

5. دالة الجزء الصحيح

تعريف: دالة الجزء الصحيح هي الدالة التي تربط كل عنصر x من

\mathbb{R} بالعدد الصحيح النسبي الوحيد n الذي يحقق: $n \leq x < n + 1$

نرمز لصورة x بهذه الدالة بالرمز $E(x)$

ملاحظات: $\forall n \in \mathbb{Z}$

❖ دالة الجزء الصحيح متصلة على اليمين في النقطة n وغير متصلة على اليسار في النقطة n

❖ دالة الجزء الصحيح متصلة على المجال $[n; n+1[$

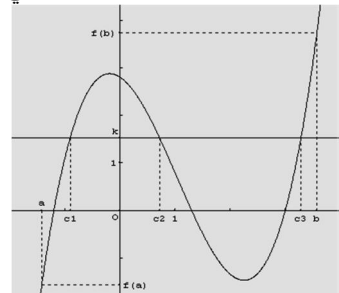
❖ دالة الجزء الصحيح غير متصلة في النقطة n

II. صورة مجال بدالة متصلة:

1. صورة قطعة وصورة مجال

• صورة قطعة بدالة متصلة هي أيضا قطعة

• صورة مجال بدالة متصلة هي أيضا مجال



2. حالة دالة متصلة ورتبية قطاعا

الحالة 1: f متصلة وتزايدية قطاعا

$$f([a;b]) = \left[f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right] \text{ و } f([a;b]) = [f(a); f(b)]$$

$$f(]a;b]) = \left[\lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right] \text{ و } f(]a;b]) = \left[\lim_{x \rightarrow a^+} f(x); f(b) \right]$$

الحالة 2: f متصلة وتناقصية قطاعا

$$I = [0; \pi] \quad \cos x = x \quad 2.$$

الجواب (1): نضع $f(x) = \sin x + \frac{1}{3}$:

المعادلة تصبح: $f(x) = 0$

f دالة متصلة على \mathbb{R} اذن متصلة على $I = \left[-\frac{\pi}{6}; 0\right]$:

$$f(0) \times f\left(-\frac{\pi}{6}\right) < 0 \text{ اذن: } f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{6} < 0 \text{ و } f(0) = \frac{1}{3} > 0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم الوسيطة فان المعادلة $f(x) = 0$

تقبل حلا على الأقل في المجال I

(2) $\cos x = x$ يعني $\cos x - x = 0$

نضع: $f(x) = \cos x - x$ المعادلة تصبح: $f(x) = 0$

f دالة متصلة على \mathbb{R} اذن متصلة على $I = [0; \pi]$:

$$f(0) \times f(\pi) < 0 \text{ اذن: } f(\pi) = -1 - \pi < 0 \text{ و } f(0) = 1 > 0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم الوسيطة فان المعادلة $f(x) = 0$

تقبل حلا على الأقل في المجال I

نتيجة 2: إذا كانت f دالة متصلة ورتيبة قطعاً على مجال $[a; b]$

و $f(a) \times f(b) < 0$ فان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً في

المجال $[a; b]$.

مثال: بين أن المعادلة التالية تقبل حلاً وحيداً في المجال I :

$$I = [-1; 0] \quad x^3 + 2x + 1 = 0$$

الجواب: نضع: $f(x) = x^3 + 2x + 1$:

المعادلة تصبح: $f(x) = 0$

f دالة حدودية اذن متصلة على \mathbb{R} اذن متصلة على $I = [-1; 0]$:

$$f(0) \times f(-1) < 0 \text{ اذن: } f(-1) = -2 < 0 \text{ و } f(0) = 1 > 0$$

ومنه $f'(x) = (x^3 + 2x + 1)' = 3x^2 + 2 > 0$ دالة متصلة تزايدية قطعاً

على المجال $I = [-1; 0]$

ومنه حسب مبرهنة القيم الوسيطة فان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً

وحيداً في المجال I

تمرين 7: بين أن المعادلات التالية تقبل حلاً وحيداً في المجال I في

الحالات التالية:

$$1. \quad I = \left[\frac{1}{2}; \sqrt{2}\right] \quad x^4 + 2x - 3 = 0$$

$$2. \quad I = [-2; -1] \quad 2x^3 + 3x + 20 = 0$$

الجواب (1): نضع: $f(x) = x^4 + 2x - 3$:

المعادلة تصبح: $f(x) = 0$

f دالة حدودية اذن متصلة على \mathbb{R} اذن متصلة على $I = \left[\frac{1}{2}; \sqrt{2}\right]$:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \times f(\sqrt{2}) < 0 \text{ اذن: } f(\sqrt{2}) = 1 + \sqrt{2} > 0 \text{ و } f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{31}{16} < 0$$

$$x \in \left[\frac{1}{2}; \sqrt{2}\right] \text{ لأن: } f'(x) = (x^4 + 2x - 3)' = 4x^3 + 2 > 0$$

ومنه f دالة متصلة تزايدية قطعاً على المجال $I = \left[\frac{1}{2}; \sqrt{2}\right]$

ومنه حسب مبرهنة القيم الوسيطة فان المعادلة $f(x) = 0$

تقبل حلاً وحيداً في المجال I

أجوبة (1): $f(x) = -4x + 1$

f دالة حدودية اذن متصلة على \mathbb{R} اذن متصلة على $I = [1; 2]$:

ومنه $f'(x) = (-4x + 1)' = -4 < 0$ و f تناقصية قطعاً على I

$$f(I) = f([1; 2]) = [f(2); f(1)] = [-7; -3]$$

$$f(J) = f([2; +\infty[) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(2)]$$

$$f(J) = f([2; +\infty[) =]-\infty; -7] \text{ ومنه: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -4x + 1 = -\infty$$

(2) دالة جذرية اذن متصلة على مجموعة تعريفها $f(x) = \frac{x-1}{2x-1}$

نحدد مجموعة تعريف الدالة f

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x - 1 \neq 0\} \text{ يعني } x = \frac{1}{2} \text{ ومنه: } D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} \text{ ومنه } f \text{ دالة متصلة على } D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

وبالتالي f دالة متصلة على كل المجالات التالية:

$$I = [2; 6[\text{ و } J =]-\infty; \frac{1}{2}[\text{ و } K = \left] \frac{1}{2}; +\infty[$$

$$f'(x) = \left(\frac{x-1}{2x-1}\right)' = \frac{(x-1)' \times (2x-1) - (x-1) \times (2x-1)'}{(2x-1)^2} = \frac{1}{(2x-1)^2} > 0$$

ومنه تزايدية قطعاً $f(I) = f([2; 6[) = [f(2); f(6)[= \left[\frac{1}{3}; \frac{5}{11}[$

$$f(J) = f\left(]-\infty; \frac{1}{2}[\right) = \left[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) \right]$$

لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{x-1}{2x-1} = \frac{1}{2}$ ومنه: $f(J) = \left] \frac{1}{2}; +\infty[$

$$f(K) = f\left(\left] \frac{1}{2}; +\infty[\right) = \left[\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right] = \left] -\infty; \frac{1}{2}[\text{ و } K = \left] \frac{1}{2}; +\infty[$$

3. مبرهنة القيم الوسيطة

خاصية: لتكن f دالة متصلة على مجال I و a و b عنصرين من I

لكل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الأقل

عنصر c بين a و b بحيث $f(c) = k$

نتيجة 1: إذا كانت f دالة متصلة على مجال $[a; b]$ و

$f(a) \times f(b) < 0$ فان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً على الأقل في

المجال $[a; b]$.

مثال: بين أن المعادلة التالية تقبل حلاً على الأقل في المجال I :

$$I = [0; 1] \quad x^4 + x^2 + 4x - 1 = 0$$

الجواب: نضع: $f(x) = x^4 + x^2 + 4x - 1$:

المعادلة تصبح: $f(x) = 0$

f دالة حدودية اذن متصلة على \mathbb{R} اذن متصلة على $I = [0; 1]$:

$$f(0) \times f(1) < 0 \text{ اذن: } f(1) = 5 \text{ و } f(0) = -1$$

ومنه حسب مبرهنة القيم الوسيطة فان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً

على الأقل في المجال $I = [0; 1]$

تمرين 6: بين أن المعادلات التالية تقبل حلاً على الأقل في المجال I في

الحالات التالية:

$$1. \quad I = \left[-\frac{\pi}{6}; 0\right] \quad \sin x + \frac{1}{3} = 0$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad \text{نستعمل القاعدة التالية: } f(x) = \frac{x-3}{x+2}$$

$$f'(x) = \left(\frac{x-3}{x+2}\right)' = \frac{(x-3)'(x+2) - (x-3)(x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{1(x+2) - 1(x-3)}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2} > 0$$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$		+	+
$f(x)$	1	$+\infty$	1

(2) g هي قصور الدالة f على المجال $I =]-2; +\infty[$ ومن g دالة

متصلة على المجال $I =]-2; +\infty[$

g تزايدية قطعاً على المجال $I =]-2; +\infty[$

ومن g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على

مجال: $J = f(I) = f(]-2; +\infty[) =]-\infty; 1[$

$$\begin{cases} g(y) = x \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = g^{-1}(x) \\ x \in f(I) \end{cases} \quad (3)$$

$$y-3 = x(y+2) \text{ يعني } \frac{y-3}{y+2} = x \text{ يعني } \begin{cases} g(y) = x \\ y \in]-2; +\infty[\end{cases}$$

$$y(1-x) = 2x+3 \text{ يعني } y - xy = 2x+3$$

$$\text{يعني } g^{-1}(x) = \frac{2x+3}{1-x} \text{ ومنه } y = \frac{2x+3}{1-x}$$

$$\text{ومنه: } g^{-1}:]-\infty; 1[\rightarrow]-2; +\infty[$$

$$\dots\dots x \rightarrow g^{-1}(x) = \frac{2x+3}{1-x}$$

تمرين 8: لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي: $f(x) = \frac{3x+2}{x+1}$

$$\left(I = \left] -\frac{1}{2}; +\infty[\text{ و } f(x) = \frac{x-1}{2x+1} \right) \text{ أو}$$

1. أدرس الدالة f وحدد جدول تغيرات f

2. بين أن الدالة g قصور الدالة f على المجال $I =]-1; +\infty[$

تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يجب تحديده

3. حدد الدالة العكسية g^{-1} للدالة f لكل x من J

خاصية 2: إذا كانت f دالة عددية متصلة ورتبية قطعاً على

المجال I و f^{-1} دالتها العكسية فان:

■ f^{-1} متصلة على المجال $f(I)$

■ f^{-1} رتبية قطعاً على المجال $f(I)$ ولها نفس رتبة الدالة f

منحنى الدالة f^{-1} هو مماثل منحنى الدالة f بالنسبة

للمستقيم: $y = x$ في معلم متعامد ممنظم

مثال: لتكن f الدالة العددية المعرفة على $I = \left] \frac{1}{2}; +\infty[$

$$f(x) = \sqrt{2x-1}$$

1. بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية معرفة على مجال

J يجب تحديده

2. حدد الدالة العكسية f^{-1} للدالة f لكل x من J

3. أرسم المنحني (C_f) الممثل للدالة f والمنحني $(C_{f^{-1}})$

الممثل للدالة f^{-1} في نفس المعلم المتعامد الممنظم (o, \vec{i}, \vec{j})

(2) نضع: $f(x) = 2x^3 + 3x + 20$

المعادلة تصبح: $f(x) = 0$

f دالة حدودية اذن متصلة على \mathbb{R} اذن متصلة على: $I = [-2; -1]$

$$f(-2) \times f(-1) < 0 \text{ اذن: } f(-2) = -2 < 0 \text{ و } f(-1) = 15 > 0$$

$$f'(x) = (2x^3 + 3x + 20)' = 6x^2 + 3 > 0$$

ومن f دالة متصلة تزايدية قطعاً على المجال $I = [-2; -1]$

ومن $f(x) = 0$ مبرهنة القيم الوسيطة فان المعادلة

تقبل حلاً وحيداً في المجال I

III. العمليات على الدوال المتصلة:

خاصية 1: ليكن I مجالاً ضمن المجموعة \mathbb{R} و k عدد حقيقي

• إذا كانت f و g دالتين متصلتين على المجال I فان الدوال

$f+g$ و $f \times g$ و $k \times f$ دوال متصلة على I

• إذا كانت f و g دالتين متصلتين على المجال I و g لا تتعدم على I

فان: $\frac{1}{g}$ و $\frac{f}{g}$ دالتين متصلتان على المجال I

خاصية 2: لتكن f و g دالتين عدديتين

إذا كانت f دالة متصلة على المجال I و g دالة متصلة على المجال

J بحيث $f(I) \subset J$

فان الدالة: $g \circ f$ متصلة على المجال I

مثال: أدرس اتصال الدوال المعرفة على \mathbb{R} كالتالي:

$$h(x) = x^3 - x + 1 + \sin x \quad (1)$$

$$h(x) = \sin(x^3 - x + 1) \quad (2)$$

أجوبة: (1) h هي مجموع دالتين متصلتين على \mathbb{R} اذن هي دالة متصلة على \mathbb{R}

(2) h هي مركب دالتين متصلتين على \mathbb{R} اذن هي دالة متصلة على \mathbb{R}

$$h = g \circ f \quad g(x) = \sin x \text{ و } f(x) = x^3 - x + 1$$

IV. الدالة العكسية لدالة متصلة ورتبية قطعاً على مجال

خاصية 1: إذا كانت f دالة عددية متصلة ورتبية قطعاً على المجال

I فان الدالة f تقبل دالة عكسية

نرمز لها بالرمز f^{-1} و معرفة على $J = f(I)$ تحقق:

$$\forall x \in f(I) \quad (f \circ f^{-1})(x) = x \quad \text{و} \quad \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in f(I) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$$

$$\forall y \in I \quad (f^{-1} \circ f)(y) = y \quad \text{و}$$

مثال: لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي: $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$

1. أدرس تغيرات الدالة f وحدد جدول تغيرات

2. بين أن الدالة g قصور الدالة f على المجال $I =]-2; +\infty[$ تقبل

دالة عكسية معرفة على مجال J يجب تحديده

3. حدد الدالة العكسية g^{-1} للدالة f لكل x من J

$$f(x) = \frac{x-3}{x+2} \quad \text{أجوبة: (1)}$$

نحدد مجموعة تعريف الدالة f

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x+2 \neq 0\}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-2\} \text{ ومنه } x+2=0 \text{ يعني } x=-2$$

اذن g متصلة على $I = [0; +\infty[$:

$$g'(x) = \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right)' = \frac{(x^2)' \times (x^2+1) - (x^2) \times (x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$$

$$\forall x \in [0; +\infty[\quad g'(x) = \frac{2x \times (x^2+1) - (x^2) \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2} \geq 0$$

g تزايدية قطعاً على المجال $I = [0; +\infty[$

وبالتالي g تقبل دالة عكسية g^{-1}

معرفة على مجال: $J = f(I) = g([0; +\infty[) = [0; 1[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \quad \text{لأن:}$$

$$\begin{cases} g(y) = x \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = g^{-1}(x) \\ x \in g(I) \end{cases} \quad (3)$$

$$x(y^2+1) = y^2 \quad \text{يعني} \quad \frac{y^2}{1+y^2} = x \quad \text{يعني} \quad \begin{cases} f(y) = x \\ y \in [0; 1[\end{cases}$$

$$y^2 = \frac{-x}{x-1} = \frac{x}{1-x} \quad \text{يعني} \quad y^2(x-1) = -x \quad \text{يعني} \quad xy^2 - y^2 = -x$$

$$y \in [0; 1[\quad \text{يعني} \quad y = \sqrt{\frac{x}{1-x}} \quad \text{أو} \quad y = -\sqrt{\frac{x}{1-x}} \quad \text{وبما أننا نعلم أن:}$$

$$\text{اذن: } y \text{ موجب ومنه: } y = \sqrt{\frac{x}{1-x}} \quad \text{ومنه: } g^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$$

$$\text{ومنه: } g^{-1}: [0; 1[\rightarrow [0; +\infty[$$

$$\dots\dots x \rightarrow g^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$$

V. دالة الجذر من الرتبة n :

1. نتيجة:

ليكن n عدداً صحيحاً طبيعياً غير منعدم

الدالة: $f: x \rightarrow x^n$ متصلة و تزايدية قطعاً على المجال $[0; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{و} \quad f(0) = 0$$

إذن تقبل دالة عكسية تسمى دالة الجذر من الرتبة n

و نرسم لها بالرمز: $\sqrt[n]{}$

العدد $\sqrt[n]{x}$ يسمى الجذر من الرتبة n للعدد x

$$\text{ولدينا: } \begin{cases} y = \sqrt[n]{x} \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^n = y \\ x \geq 0 \end{cases}$$

2. خصائص:

$$m \in \mathbb{N}^* \quad \text{و} \quad n \in \mathbb{N}^* \quad \bullet \quad y \in \mathbb{R}^+ \quad \text{و} \quad x \in \mathbb{R}^+ \quad x = y \Leftrightarrow \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y}$$

$$\bullet \quad y \in \mathbb{R}^+ \quad \text{و} \quad x \in \mathbb{R}^+ \quad x \geq y \Leftrightarrow \sqrt[n]{x} \geq \sqrt[n]{y}$$

$$\bullet \quad x \in \mathbb{R}^+ \quad (\sqrt[n]{x})^n = x$$

$$\bullet \quad y \in \mathbb{R}^+ \quad \text{و} \quad x \in \mathbb{R}^+ \quad \sqrt[n]{x \times y} = \sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y}$$

$$\bullet \quad y \in \mathbb{R}^{**} \quad \sqrt[n]{\frac{1}{y}} = \frac{1}{\sqrt[n]{y}}$$

$$\bullet \quad x \in \mathbb{R}^+ \quad \text{و} \quad y \in \mathbb{R}^{**} \quad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$

$$\bullet \quad x \in \mathbb{R}^+ \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n \times m]{x}$$

$$\bullet \quad x \in \mathbb{R}^+ \quad \sqrt[n \times m]{x^m} = \sqrt[n]{x}$$

$$D_f = \left[\frac{1}{2}; +\infty[= I \quad \text{أجوبة (1):}$$

$$f \text{ دالة متصلة على المجال } I = \left[\frac{1}{2}; +\infty[$$

$$f'(x) = (\sqrt{2x-1})' = \frac{(2x-1)'}{2\sqrt{2x-1}} = \frac{1}{\sqrt{2x-1}} > 0$$

$$f \text{ تزايدية قطعاً على المجال } I = \left[\frac{1}{2}; +\infty[$$

x	$1/2$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$
$f(x)$		$+\infty$

ومنه f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال:

$$J = f(I) = f\left(\left[\frac{1}{2}; +\infty\right]\right) = [0; +\infty[$$

$$\begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in f(I) \end{cases} \quad (2)$$

$$f(y) = x \quad \text{يعني} \quad \sqrt{2y-1} = x \quad \text{يعني} \quad 2y-1 = x^2$$

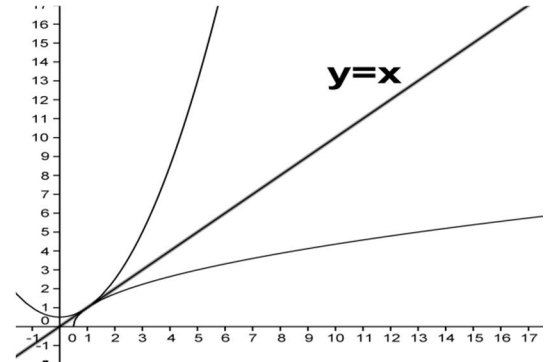
$$\text{يعني} \quad 2y = x^2 + 1 \quad \text{يعني} \quad y = \frac{x^2+1}{2} \quad \text{ومنه: } f^{-1}(x) = \frac{x^2+1}{2}$$

$$\text{ومنه: } f^{-1}: [0; +\infty[\rightarrow \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$$

$$\dots\dots x \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x^2+1}{2}$$

(3) منحنى الدالة f^{-1} هو مماثل منحنى الدالة f بالنسبة للمستقيم:

$y = x$ في معلم متعامد منظم



تمرين 9: لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي: $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$

ولتكن g قصور الدالة f على المجال $I = [0; +\infty[$

1. حدد مجموعة تعريف الدالة f

2. بين أن الدالة g تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يجب تحديده

3. حدد الدالة العكسية g^{-1} للدالة f لكل x من J

الجواب:

(1) نحدد مجموعة تعريف الدالة f

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 1+x^2 \neq 0\}$$

$1+x^2 = 0$ يعني $x^2 = -1$ ليس لها حل في \mathbb{R} ومنه: $D_f = \mathbb{R}$

(2) f دالة جذرية اذن متصلة على مجموعة تعريفها

أمثلة:

(1) أحسب وبسط التعابير التالية :

$$\sqrt[4]{4\sqrt{2}} \text{ و } (\sqrt[3]{2})^3$$

$$B = \frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[5]{16} \times \sqrt[3]{4} \times \sqrt[5]{2}}{\sqrt[15]{256}} \quad A = \sqrt[3]{32} - (\sqrt[7]{2})^7 + \sqrt[3]{\sqrt[5]{512}} + \frac{\sqrt[4]{96}}{\sqrt[3]{3}}$$

$$D = \sqrt[6]{\frac{2^5 \times 128000000}{27^2}} \quad C = \frac{(27)^{\frac{2}{9}} \times (81)^{\frac{1}{4}} \times 9^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{17}{3}}}$$

(2) قارن: $\sqrt[3]{2}$ و $\sqrt[4]{3}$

(3) حل في \mathbb{R} المعادلات التالية :

(أ) $\sqrt[3]{3x-4} = 2$ (ب) $(\sqrt[5]{x})^2 - 5\sqrt[5]{x} + 6 = 0$

(4) أحسب النهايات التالية : $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[5]{x^3+24}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^5+2x^3-x+4}$$

أجوبة:

(1) $\sqrt[2]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[2 \times 4]{2} = \sqrt[8]{2}$ و $(\sqrt[3]{2})^3 = 2$

$$A = \sqrt[3]{32} - (\sqrt[7]{2})^7 + \sqrt[3]{\sqrt[5]{512}} + \frac{\sqrt[4]{96}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{2^5} - 2 + \sqrt[3]{2^9} + \frac{\sqrt[4]{2^9 \cdot 3}}{\sqrt[3]{3}} = 2 - 2 + \sqrt[3]{2^9} + \sqrt[3]{2^9} = 4$$

$$A = 2 - 2 + 2 + 2 = 4$$

$$B = \frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[5]{16} \times \sqrt[6]{4} \times \sqrt[5]{2}}{\sqrt[15]{256}} = \frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[5]{2^4} \times \sqrt[6]{2^2} \times \sqrt[5]{2}}{\sqrt[15]{256}} = \frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[5]{2^4} \times \sqrt[6]{2^2} \times \sqrt[5]{2}}{\sqrt[15]{256}}$$

$$B = \frac{2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{4}{5}} \times 2^{\frac{2}{6}} \times 2^{\frac{1}{5}}}{\sqrt[15]{2^8}} = \frac{2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{4}{5}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{5}}}{2^{\frac{8}{15}}} = \frac{2^{\frac{23}{15}}}{2^{\frac{8}{15}}} = 2^{\frac{23-8}{15}} = 2^{\frac{15}{15}} = 2$$

$$C = \frac{(27)^{\frac{2}{9}} \times (81)^{\frac{1}{4}} \times 9^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{17}{3}}} = \frac{(3^3)^{\frac{2}{9}} \times (3^4)^{\frac{1}{4}} \times (3^2)^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{17}{3}}} = \frac{3^{\frac{2}{3}} \times 3^1 \times 3^5}{3^{\frac{17}{3}}} = \frac{3^{\frac{20}{3}}}{3^{\frac{17}{3}}} = 3^{\frac{3}{3}} = 3$$

$$C = \frac{20}{3^{\frac{17}{3}}} = 3^{\frac{20-17}{3}} = 3^{\frac{3}{3}} = 3^1 = 3$$

$$D = \sqrt[6]{\frac{2^5 \times 128000000}{27^2}} = \sqrt[6]{\frac{2^5 \times 2^7 \times 10^6}{(3^3)^2}} = \sqrt[6]{\frac{10^6}{3^6} \times 2^{12}} = \sqrt[6]{\frac{10^6}{3^6} \times (2^2)^6} = \sqrt[6]{\left(\frac{10}{3}\right)^6 \times (2^2)^6} = \frac{10}{3} \times 2^2 = \frac{40}{3}$$

$$D = \sqrt[6]{\left(\frac{10}{3}\right)^6 \times (2^2)^6} = \frac{10}{3} \times 2^2 = \frac{40}{3}$$

(2) مقارنة: $\sqrt[3]{2}$ و $\sqrt[4]{3}$ نطبق القاعدة: $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n \times m]{x}$

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[7 \times 5]{2^7} = \sqrt[35]{128} \text{ و } \sqrt[4]{3} = \sqrt[7 \times 5]{3^5} = \sqrt[35]{243}$$

لدينا: $\sqrt[35]{243} > \sqrt[35]{128}$ لأن: $243 > 128$ ومنه: $\sqrt[3]{2} > \sqrt[4]{3}$

(3) (أ) $\sqrt[3]{3x-4} = 2$ يعني $\sqrt[3]{3x-4} = (2)^3$

يعني $3x-4 = 32$ يعني $3x = 36$ يعني $x = 12$ ومنه: $S = \{12\}$

(ب) نضع $\sqrt[5]{x} = X$ تصبح: $X^2 - 5X + 6 = 0$

المعادلة تصبح: $X^2 - 5X + 6 = 0$

نحل المعادلة باستعمال المميز $a = 1$ و $b = -5$ و $c = 6$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فإن هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ و } x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{5-1}{2 \times 1} = \frac{4}{2} = 2 \text{ و } x_1 = \frac{5+1}{2 \times 1} = \frac{6}{2} = 3$$

ومنه: $\sqrt[5]{x} = 2$ أو $\sqrt[5]{x} = 3$ يعني $(\sqrt[5]{x})^5 = (2)^5$ أو

$$(\sqrt[5]{x})^5 = (3)^5$$

يعني $x = 32$ أو $x = 243$ ومنه: $S = \{32; 243\}$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[5]{x^3+24} = \sqrt[5]{2^3+24} = \sqrt[5]{8+24} = \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2 \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^5+2x^3-x+4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^5} = \sqrt[3]{+\infty} = +\infty$$

نحتفظ بأكبر درجة فقط

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} = \left(\frac{0}{0}\right)''$$

نعلم أن: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{x+1}-1)((\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2)}{x((\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{x+1})^3 - (1)^3}{x((\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1-1}{x((\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2} = \frac{1}{1+1+1} = \frac{1}{3}$$

تمرين 10: (1) أحسب وبسط:

$$A = \frac{\sqrt[3]{1024} \times \sqrt[5]{3200000}}{\sqrt[4]{64} \times \sqrt[3]{\sqrt{252}} \times \sqrt{18}}$$

(2) قارن: $\sqrt[4]{3}$ و $\sqrt[5]{4}$

(3) قارن: $\sqrt[3]{28}$ و $\sqrt{13}$ وقارن: $\sqrt[5]{151}$ و $\sqrt[3]{23}$ أجوبة:

(1)

$$A = \frac{\sqrt[3]{1024} \times \sqrt[5]{3200000}}{\sqrt[4]{64} \times \sqrt[3]{\sqrt{252}} \times \sqrt{18}} = \frac{\sqrt[3]{2^{10}} \times \sqrt[5]{2^{10} \times 10^5}}{\sqrt[4]{2^6} \times \sqrt[3]{\sqrt{2^8} \times 3} \times \sqrt{2 \times 3^2}} = \frac{2^{\frac{10}{3}} \times 2 \times 10}{2^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{4}{3}} \times 3 \times 2^{\frac{1}{2}}} = 20$$

(2) مقارنة: $\sqrt[4]{3}$ و $\sqrt[5]{4}$

نطبق القاعدة: $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n \times m]{x}$

$$\sqrt[4]{3} = \sqrt[4 \times 5]{3^5} = \sqrt[20]{243} \text{ و } \sqrt[5]{4} = \sqrt[5 \times 4]{4^4} = \sqrt[20]{4096}$$

لدينا: $\sqrt[20]{4096} > \sqrt[20]{243}$ لأن: $4096 > 243$ ومنه: $\sqrt[5]{4} > \sqrt[4]{3}$

(ب) مقارنة: $\sqrt[3]{28}$ و $\sqrt{13}$

نطبق القاعدة: $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n \times m]{x}$

$$\sqrt[3]{28} = \sqrt[6 \times 2]{28^2} = \sqrt[6]{784} \text{ و } \sqrt{13} = \sqrt[2 \times 3]{13^3} = \sqrt[6]{2197}$$

لدينا: $\sqrt[6]{2197} > \sqrt[6]{784}$ لأن: $2197 > 784$ ومنه:

$$\sqrt{13} > \sqrt[3]{28}$$

(ج) مقارنة: $\sqrt[5]{23}$ و $\sqrt[15]{151}$

$$\sqrt[5]{23} = \sqrt[15 \times 5]{23^3} = \sqrt[15]{12167}$$

$$\sqrt[5]{23} > \sqrt[15]{151}$$

VI. القوة الجذرية لعدد حقيقي موجب قطعاً:

• **تعريف:** ليكن $x \in \mathbb{R}^{+*}$ و $r = \frac{m}{n}$ عددا جذريا غير منعدم

$$(n \in \mathbb{N}^* \text{ و } m \in \mathbb{Z})$$

نسمي القوة الجذرية للعدد x ذات الأس r العدد الذي نرمز له بالرمز

$$x^r \text{ والمعروف بما لي: } x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ و } x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{7-9}{2 \times 1} = \frac{-2}{2} = -1 \text{ و } x_1 = \frac{7+9}{2 \times 1} = \frac{16}{2} = 8$$

$$x^{\frac{1}{3}} = -1 \text{ أو } x^{\frac{1}{3}} = 8 \text{ ومنه:}$$

المعادلة: $x^{\frac{1}{3}} = -1$ ليس لها حل في \mathbb{R}

اذن نأخذ فقط $x^{\frac{1}{3}} = 8$ تعني $(8)^3 = x^{\frac{1}{3}}$ تعني $x = 512$

ومنه: $S = \{512\}$

(3) أحسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[5]{x^5 + x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[5]{x^5} = +\infty$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \text{ نعلم أن: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$$

$$\text{اذن: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x} - 1)((\sqrt[3]{x})^2 + 1 + \sqrt[3]{x} + 1^2)}{(x-1)((\sqrt[3]{x})^2 + 1 + \sqrt[3]{x} + 1^2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{((\sqrt[3]{x})^3 - 1^3)}{(x-1)((\sqrt[3]{x})^2 + 1 + \sqrt[3]{x} + 1^2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x-1)((\sqrt[3]{x})^2 + 1 + \sqrt[3]{x} + 1^2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{((\sqrt[3]{x})^2 + 1 + \sqrt[3]{x} + 1^2)} = \frac{1}{1 + 1 + 1 + 1} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x+1} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \left((\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 + \sqrt[3]{x+1} + 1^2 \right)}{(\sqrt[3]{x+1} - 1) \left((\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 + \sqrt[3]{x+1} + 1^2 \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \left((\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 + \sqrt[3]{x+1} + 1^2 \right)}{(\sqrt[3]{x+1})^3 - (1)^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \left((\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 + \sqrt[3]{x+1} + 1^2 \right)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \left((\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 + \sqrt[3]{x+1} + 1^2 \right) = 1 \times 3 = 3$$

تمرين 12: حل في \mathbb{R} المعادلات التالية:

$$x^7 = -128 \quad (2) \quad x^5 = 32 \quad (1)$$

$$x^6 = -8 \quad (4) \quad x^4 = 3 \quad (3)$$

الأجوبة: (1) $x^5 = 32$ اذن: $x > 0$

ومنه: $x = \sqrt[5]{32}$ يعني $x = \sqrt[5]{2^5}$ يعني $x = 2$ ومنه: $S = \{2\}$

$$(2) \quad x^7 = -128 \text{ اذن: } x < 0$$

ومنه: $x = -\sqrt[7]{128}$ يعني $x = -\sqrt[7]{2^7}$ يعني $x = -2$ ومنه:

$$S = \{-2\}$$

$$(3) \quad x^4 = 3 \text{ يعني } x = \sqrt[4]{3} \text{ أو } x = -\sqrt[4]{3} \text{ ومنه:}$$

$$S = \{-\sqrt[4]{3}; \sqrt[4]{3}\}$$

$$(4) \quad x^6 = -8 < 0 \text{ و } x^6 \geq 0 \text{ ومنه: } S = \Phi$$

• **حالة خاصة:** $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ $x \in \mathbb{R}^+$ $n \in \mathbb{N}^*$

• **نتائج وخصائص:** $\forall x \in \mathbb{R}^{**}$ و $\forall y \in \mathbb{R}^{**}$ و $\forall r' \in \mathbb{Q}^*$

$$\forall r \in \mathbb{Q}^*$$

$$(x^r)^{r'} = x^{r \times r'} \text{ و } x^r \times y^r = (x \times y)^r \text{ و } x^r \times x^{r'} = x^{r+r'}$$

$$\frac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'} \text{ و } \frac{1}{x^r} = x^{-r} \text{ و } \frac{x^r}{y^r} = \left(\frac{x}{y}\right)^r$$

$$\text{مثال 1: } 2^4 = 4\sqrt{2^3} = 4\sqrt{8}$$

$$\text{مثال 2: } 2^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{2^{-2}} = \sqrt[7]{\frac{1}{2^2}} = \sqrt[7]{\frac{1}{4}}$$

تمرين 11: (1) أحسب وبسط التعابير التالية:

$$B = \frac{\sqrt[4]{9} \times \sqrt{\sqrt[3]{3^3} \times \sqrt{9}}}{\sqrt[5]{81} \times \sqrt{\sqrt[3]{3}}} \text{ و } A = \frac{\sqrt[5]{3^5} \times \sqrt[3]{9} \times (\sqrt[3]{9})^3}{\sqrt[3]{3}}$$

(2) حل في \mathbb{R} المعادلات التالية:

$$(أ) \quad \sqrt[3]{x-1} = 3 \text{ (ب) } x^3 - 7x^3 - 8 = 0$$

(3) أحسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x+1} - 1} \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[5]{x^5 + x^2 + 1}$$

أجوبة (1):

$$A = \frac{\sqrt[5]{3^5} \times \sqrt[3]{9} \times (\sqrt[3]{9})^3}{\sqrt[3]{3}} = \frac{(3^5)^{\frac{1}{5}} \times (3^2)^{\frac{1}{3}} \times (3^5)^3}{3^{\frac{1}{3}}} = \frac{3^1 \times 3^{\frac{2}{3}} \times 3^3}{3^{\frac{1}{3}}} = \frac{3^{\frac{1+2+3}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}} = \frac{3^{\frac{6}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}} = \frac{3^2}{3^{\frac{1}{3}}} = \frac{9}{\sqrt[3]{3}}$$

$$A = \frac{3^{\frac{1+2+3}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}} = \frac{3^{\frac{6}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}} = \frac{3^2}{3^{\frac{1}{3}}} = \frac{9}{\sqrt[3]{3}}$$

$$B = \frac{\sqrt[4]{9} \times \sqrt{\sqrt[3]{3^3} \times \sqrt{9}}}{\sqrt[5]{81} \times \sqrt{\sqrt[3]{3}}} = \frac{(3^2)^{\frac{1}{4}} \times (3^4)^{\frac{1}{6}}}{(3^4)^{\frac{1}{5}} \times (3)^{\frac{1}{8}}} = \frac{3^{\frac{1}{2}} \times 3}{(3^4)^{\frac{1}{5}} \times (3)^{\frac{1}{8}}}$$

$$B = \frac{3^{\frac{1}{2}} \times 3}{(3^4)^{\frac{1}{5}} \times (3)^{\frac{1}{8}}} = \frac{3^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{4}{5}} \times (3)^{\frac{1}{8}}} = 3^{\frac{3}{2} - \frac{4}{5} - \frac{1}{8}} = 3^{\frac{30}{40} - \frac{32}{40} - \frac{5}{40}} = 3^{\frac{30-32-5}{40}} = 3^{-\frac{7}{40}} = \frac{1}{3^{\frac{7}{40}}}$$

$$B = 3^{\frac{23}{40}} = \sqrt[40]{3^{23}}$$

$$(2) \quad \sqrt[3]{x-1} = 3 \text{ يعني } (\sqrt[3]{x-1})^3 = 3^3 \text{ يعني } x-1 = 27$$

يعني $x = 28$ ومنه: $S = \{28\}$

$$(ب) \quad x^{\frac{2}{3}} - 7x^{\frac{1}{3}} - 8 = 0 \text{ يعني } \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 - 7x^{\frac{1}{3}} - 8 = 0$$

نضع $x^{\frac{1}{3}} = X$ المعادلة تصبح: $X^2 - 7X - 8 = 0$

نحل المعادلة باستعمال المميز $a = 1$ و $b = -7$ و $c = -8$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times (-8) = 49 + 32 = 81 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما: