المادة : الرياضيات

مستوى: السنة الثانية من سلك الباكالوريا

- **شعبة التعليم الأصيل: مسلك العلوم الشرعية و مسلك اللغة العربية**
- **شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم الإنسانية**

مذكرة رقم 1 في درس المتتاليات الترجعية

مذكرة رقم : 1
الأستاذ : عثماني نجيب

الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
- المتتاليات من الشكل: $u_{n+1}=au_n+b$ وتمثيلها مبيانيا؛ - نهايات المتتاليات المرجعية: $(n)_{n\geq0}$ و $(n^2)_{n\geq0}$ و $(n^3)_{n\geq0}$ و $(\sqrt{n})_{n\geq0}$ و $(n^p)_{n\geq0}$ حيث p عدد صحيح طبيعي أكبر من 3؛ - نهايات المتتاليات المرجعية: $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq0}$ و $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geq0}$ و $\left(\frac{1}{n^3}\right)_{n\geq0}$ و $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq0}$ و $\left(\frac{1}{n^p}\right)_{n\geq0}$ حيث p عدد صحيح طبيعي أكبر من 3؛ - نهاية متتالية هندسية (a^n) حيث $a\in\mathbb{R}$. - العمليات على النهايات؛	- استعمال المتتاليات الهندسية والمتتاليات الحسابية في دراسة أمثلة من متتاليات من الشكل: $u_{n+1}=au_n+b$؛ - استعمال نهايات المتتاليات المرجعية لتحديد نهايات متتاليات عددية؛	- نقبل أن المتتاليات $(n)_{n\geq0}$ و $(n^2)_{n\geq0}$ و $(n^3)_{n\geq0}$ و $(\sqrt{n})_{n\geq0}$ و $(n^p)_{n\geq0}$ حيث p عدد صحيح طبيعي أكبر من 3 تؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول n إلى $+\infty$ وأن المتتاليات $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq0}$ و $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geq0}$ و $\left(\frac{1}{n^3}\right)_{n\geq0}$ و $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq0}$ و $\left(\frac{1}{n^p}\right)_{n\geq0}$ حيث p عدد صحيح طبيعي أكبر من 3، تؤول إلى 0 عندما يؤول n إلى $+\infty$ اعتبارا لكون المتتالية العددية دالة عددية معرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية؛ - جميع النهايات الواردة في محتوى البرنامج تعتبر نهايات مرجعية؛ - تعتبر العمليات على النهايات المنتهية واللامنتهية مقبولة وينبغي تعويد التلاميذ على الاستعمال الصحيح لها؛ - إن أي دراسة نظرية لمفهوم نهاية متتالية تعتبر خارج البرنامج

I. المتتاليات الحسابية: تذكير

نشاط: لاحظ ثم أتمم بأربعة أعداد ملائمة لتسلسل كل متتالية من المتتاليات التالية :

1) 0 , 2 , 4 , 6 , 8 , 10 , ...
2) 6 , 3 , 0 , -3 , -6 , -9 , -12 , ...
3) 1 , 3 , 9 , 27 , 81 , 243 , ...
4) $1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{4} , \frac{1}{8} , \frac{1}{16} , \frac{1}{32}$, ...
5) 1 , 4 , 9 , 16 , 25 , 36 , ...

مثال 1 : نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بالصيغة الصريحة التالية : $u_n=2n-1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

- أحسب حدها الأول u_0
- أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية $(u_n)_{n\geq0}$
- أحسب $u_{n+1}-u_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

الجواب: $u_0=2\times0-1=0-1=-1$

$u_1=2\times1-1=2-1=1$

$u_2=2\times2-1=4-1=3$

$u_3=2\times3-1=6-1=5$

نلاحظ أن فرق حدين متتالين هو العدد 2

$u_{n+1}-u_n=\left(2(n+1)-1\right)-(2n-1)=(2n+2-1)-(2n-1)$

إذن: $u_{n+1}-u_n=2=r \quad =(2n+2-1)-(2n-1)=(2n+1)-(2n-1)=2n+1-2n+1$

ومنه المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ هي حسابية أساسها : $r=2$

1. تعريف: نقول إن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية حسابية إذا وجد عدد حقيقي r بحيث : $u_{n+1}=u_n+r \quad \forall n\geq n_0$

العدد الحقيقي r يسمى أساس المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$

تمرين1 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $u_n = 2n+3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. أحسب : $u_{n+1} - u_n$
2. ماذا تستنتج ؟

الجواب :

$u_{n+1}-u_n = (2(n+1)+3)-(2n+3) = (2n+2+3)-(2n+3)$
$= (2n+2+3)-(2n+3) = (2n+5)-(2n+3) = 2n+5-2n-3$

اذن : $u_{n+1}-u_n = 2 = r$

ومنه المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ هي حسابية أساسها : $r=2$

2. صيغة الحد العام للمتتالية بدلالة n :

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_0 فان : $u_n = u_0 + (n-0)r$

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_1 فان : $u_n = u_1 + (n-1)r$

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_2 فان : $u_n = u_2 + (n-2)r$

3. مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية :

لتكن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية حسابية

نضع $S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_n$ حيث $n \succ p \geq n_0$

لدينا $S_n = (n-p+1)\left(\frac{u_n+u_p}{2}\right)$

المجموع $S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_n$ يحتوي على $(n-p+1)$ حد

مثال :

1. لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=\frac{1}{2}$ و حدها الأول $u_0 = 1$

أحسب المجموع التالي : $S_1 = u_3 + u_4 + u_5 + \cdots + u_{30}$

2. لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=-2$ و حدها الأول $u_0 = 4$

أحسب المجموع التالي : $S_2 = u_7 + u_8 + u_9 + \cdots + u_{25}$

الجواب : 1) $S_1 = u_3 + u_4 + u_5 + \cdots + u_{30} = (30-3+1)\frac{u_3+u_{30}}{2}$

$S_1 = (28)\frac{u_3+u_{30}}{2}$

وبما أن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $u_0 = 1$ فان : $u_n = u_0 + (n-0)r$

أي: $u_n = 1 + (n-0)\frac{1}{2}$ أي: $u_n = 1 + \frac{n}{2}$

ومنه نحسب: $u_3 = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$ و: $u_{30} = 1 + \frac{30}{2} = \frac{32}{2} = 16$

وبالتالي: $S_1 = (28)\frac{u_3+u_{30}}{2} = 14\left(\frac{5}{2}+16\right) = 14\left(\frac{37}{2}\right) = 7\times 37 = 259$

2) $S_2 = u_7 + u_8 + u_9 + \cdots + u_{25} = (25-7+1)\frac{u_7+u_{25}}{2} = (19)\frac{u_7+u_{25}}{2}$

وبما أن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=-2$ وحدها الأول $u_0 = 4$ فان : $u_n = u_0 + (n-0)r$

أي: $u_n = 4 + (n-0)(-2)$ أي: $u_n = 4 - 2n$

ومنه نحسب: $u_7 = 4 - 2\times 7 = 4 - 14 = -10$ و: $u_{25} = 4 - 2\times 25 = 4 - 50 = -46$

وبالتالي: $S_2 = (19)\frac{u_7+u_{25}}{2} = (19)\frac{-10+-46}{2} = (19)\frac{-56}{2} = 19\times -28 = -532$

تمرين2 : نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالصيغة التالية : $u_n = 3n+1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. تحقق أن $(u_n)_{n\geq 0}$ حسابية
2. أحسب المجموع : $S_6 = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_6$

الجواب : (1

$u_{n+1}-u_n = (3(n+1)+1)-(3n+1) = (3n+3+1)-(3n+1) = 3$

اذن : $u_{n+1}-u_n=3=r$ ومنه $(u_n)_{n\geq 0}$ حسابية

(2 $S_6=u_1+u_2+\cdots+u_6=(6-1+1)\frac{u_1+u_6}{2}$

$S_6=(6)\frac{u_1+u_6}{2}=3(u_1+u_6)$

وبما أن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=3$ وحدها الأول $u_0=1$ فان : $u_n=u_0+(n-0)r$

أي: $u_n=1+(n-0)3$ أي: $u_n=1+3n$

ومنه نحسب: $u_1=1+3\times1=4$ و $u_6=1+3\times6=19$

وبالتالي: $S_6=3(4+19)=3\times23=69$

تمرين3: نعتبر متتالية حسابية $(u_n)_{n\geq 0}$ أساسها : $r=2$ وحدها الأول $u_0=3$

1. أحسب u_1 و u_2 و u_3
2. أكتب u_n بدلالة n
3. أحسب المجموع : $S_6=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_{10}$

الجواب : (1 $u_1=u_0+r=3+2=5$

$u_2=u_1+r=5+2=7$

$u_3=u_2+r=7+2=9$

(2 وبما أن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=2$ وحدها الأول $u_0=3$ فان : $u_n=u_0+(n-0)r$

أي: $u_n=3+2(n-0)$ أي: $u_n=2n+3$

(3 $S=u_0+u_1+\cdots+u_{10}=(10-0+1)\frac{u_0+u_{10}}{2}$

$S_6=11\frac{u_0+u_{10}}{2}=\frac{11}{2}(3+u_{10})$

ومنه نحسب: $u_{10}=2\times10+3=23$

وبالتالي: $S=\frac{11}{2}(3+23)=\frac{11}{2}\times26=11\times13=143$

II. المتتاليات الهندسية

1. **تعريف:** نقول إن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية هندسية إذا وجد عدد حقيقي q بحيث : $u_{n+1}=qu_n \quad \forall n\geq n_0$

العدد الحقيقي q يسمى أساس المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$

مثال : نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالصيغة الصريحة التالية : $u_n=2\times3^n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

1. أحسب حدها الأول u_0
2. أحسب $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ ماذا تستنتج ؟

الجواب: (1

$u_0=2\times3^0=2\times1=2$

(2 $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2\times3^{n+1}}{2\times3^n}=\frac{3^{n+1}}{3^n}=\frac{3^n\times3^1}{3^n}=3^1=3=q$

اذن: المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $q=3$ وحدها الأول $u_0=2$

تمرين4 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $u_n=3\times\left(\frac{2}{5}\right)^n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

بين أن (u_n) متتالية هندسية و حدد أساسها و حدها الأول

الجواب: (1 $u_0=3\times\left(\frac{2}{5}\right)^0=3\times1=3$

(2 $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3\times\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{3\times\left(\frac{2}{5}\right)^n}=\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{\left(\frac{2}{5}\right)^n}=\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n\times\left(\frac{2}{5}\right)^1}{\left(\frac{2}{5}\right)^n}=\frac{2}{5}=q$ اذن: المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $q=\frac{2}{5}$ وحدها الأول $u_0=3$

2. صيغة الحد العام للمتتالية بدلالة n :

إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q غير منعدم وحدها الأول u_0 فان : $u_n = u_0 q^{n-0}$

إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q غير منعدم وحدها الأول u_1 فان : $u_n = u_1 q^{n-1}$

نتيجة : إذا كانت $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q غير منعدم فان : $u_n = u_m q^{n-m}$ لكل $n \geq n_0$ و $m \geq n_0$

مثال: نعتبر المتتالية الهندسية (u_n) بحيث حدها الأول $u_0 = 81$ وأساسها : $q = \frac{1}{3}$

1. أكتب u_n بدلالة n
2. أحسب u_1 و u_2 و u_3
3. حدد العدد الصحيح الطبيعي n بحيث $u_n = 1$

الأجوبة : 1) نعلم أن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ وحدها الأول $u_0 = 81$

اذن: $u_n = u_0 q^{n-0}$ ومنه: $u_n = 81\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$

2) $u_1 = 81\times\left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{81}{3} = 27$ و $u_2 = 81\times\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{81}{9} = 9$ و $u_3 = 81\times\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{81}{27} = 3$

3) $u_n = 1$ يعني $81\times\left(\frac{1}{3}\right)^n = 1$ يعني $81\times\frac{1}{3^n} = 1$ يعني $\frac{81}{3^n} = 1$ يعني $81 = 3^n$ يعني $n = 4$

تمرين5: نعتبر المتتالية الهندسية (u_n) بحيث حدها الأول $u_0 = 5$ و $u_3 = 40$

1. تحقق أن أساس المتتالية (u_n) هو $q = 2$
2. أكتب u_n بدلالة n
3. أحسب u_4
4. حدد العدد الصحيح الطبيعي n بحيث $u_n = 160$

الأجوبة : 1) نعلم أن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية اذن :

اذن: $u_3 = u_0 q^{3-0}$ يعني $40 = 5q^3$ يعني $q^3 = \frac{40}{5}$ يعني $q^3 = 8$ يعني $q = 2$

2) $u_n = 5\times(2)^n$

3) $u_1 = 81\times\left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{81}{3} = 27$ و $u_2 = 81\times\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{81}{9} = 9$ و $u_4 = 5\times(2)^4 = 5\times 16 = 80$

4) $u_1 = 81\times\left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{81}{3} = 27$ و $u_2 = 81\times\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{81}{9} = 9$ و $u_5 = 2\times u_4 = 2\times 80 = 160$

ومنه : $n = 5$

3. مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية :

لتكن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية هندسية أساسها q غير منعدم نضع $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

إذا كان $q \neq 1$ فان : $S_n = u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$

تمرين6: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالصيغة التالية : $u_{n+1} = 3\times U_n$ و $u_0 = 2$ $\quad \forall n\in\mathbb{N}$

1. تحقق أن $(u_n)_{n\geq 0}$ هندسية
2. عبر عن U_n بدلالة n
3. أحسب المجموع : $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_5$

الجواب: 1)

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3\times u_n}{u_n} = 3 = q$

اذن: المتتالية هندسية أساسها $q = 3$ وحدها الأول $u_0 = 3$

2) $(u_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $q=3$ وحدها الأول $u_0=3$

اذن: $u_n=u_0q^{n-0}$ أي: $u_n=3\times(3)^n=3^1\times(3)^n=(3)^{n+1}$

3) $S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_5=u_1\times\frac{1-q^{5-1+1}}{1-q}=u_1\times\frac{1-q^5}{1-q}$

نحسب: u_1

$u_1=3^{1+1}=3^2=9$

$S_n=9\times\frac{1-3^5}{1-3}=9\times\frac{1-3^5}{-2}=9\times\frac{1-243}{-2}=9\times\frac{-242}{-2}=1029$

III. المتتاليات من صنف $U_{n+1}=aU_n+b$

مثال 1: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بالعلاقة الترجعية التالية : $\begin{cases}u_0=1\\u_{n+1}=2u_n+3\end{cases}$

أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n)

الجواب : نعوض n ب 0 فنجد : $u_{0+1}=2\times u_0+3=2\times1+3=2+3=5$

اذن : $u_1=5$

نعوض n ب 1 فنجد : $u_{1+1}=2\times u_1+3=2\times5+3=10+3=13$

اذن : $u_2=13$

نعوض n ب 2 فنجد : $u_{2+1}=2\times u_2+3=2\times13+3=26+3=29$

اذن : $u_3=29$

ملاحظة : هذه المتتالية تسمى متتالية ترجعيه

مثال 2: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\begin{cases}u_{n+1}=2u_n+2\\u_0=2\end{cases}\ \forall n\in\mathbb{N}$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n=u_n+2\quad\forall n\in\mathbb{N}$

1. أحسب u_1 و u_2 و v_0 و v_1
2. أحسب $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ و استنتج طبيعة المتتالية (v_n)
3. أكتب v_n بدلالة n
4. استنتج u_n بدلالة n

الجواب: 1) نعوض n ب 0 فنجد : $u_{0+1}=2\times u_0+2=2\times2+3=4+3=7$

اذن : $u_1=7$

نعوض n ب 1 فنجد : $u_{1+1}=2\times u_1+2=2\times7+2=14+2=16$

اذن : $u_2=16$

: نعوض n ب 0 فنجد : $v_0=u_0+2=2+2=4$

نعوض n ب 1 فنجد : $v_1=u_1+2=7+2=9$

2) $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{u_{n+1}+2}{u_n+2}=\frac{2u_n+2+2}{u_n+2}=\frac{2u_n+4}{u_n+2}=\frac{2(u_n+2)}{u_n+2}=2=q$

اذن: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=2$ وحدها الأول $v_0=4$

3) كتابة v_n بدلالة n

بما أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=2$ وحدها الأول $v_0=4$

فان: $v_n=v_0\times q^n$ أي: $v_n=4\times2^n$

4) استنتاج u_n بدلالة n

لدينا: $v_n=u_n+2$ اذن: $v_n-2=u_n$

أي: $u_n=4\times2^n-2$

تمرين7: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\forall n\in\mathbb{N}\ \begin{cases}u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n-\frac{1}{2}\\ u_0=3\end{cases}$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n=u_n+1\quad \forall n\in\mathbb{N}$

1. أحسب u_1 و u_2 و v_0 و v_1
2. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$
3. أكتب v_n بدلالة n و استنتج u_n بدلالة n
4. أحسب بدلالة n المجموع : $S=v_0+v_1+v_2+\cdots+v_n$

الجواب:(1 نعوض n ب0 فنجد: $u_{0+1}=\frac{1}{2}\times u_0-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times3-3=\frac{3}{2}-3=-\frac{3}{2}$

اذن : $u_1=-\frac{3}{2}$

نعوض n ب 1 فنجد : $u_{1+1}=\frac{1}{2}\times u_1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}-3=\frac{3}{4}-3=-\frac{9}{4}$ اذن : $u_2=-\frac{9}{4}$

نعوض n ب 0 فنجد : $v_0=u_0+1=3+1=4$.

نعوض n ب 1 فنجد : $v_1=u_1+1=-\frac{3}{2}+1=-\frac{1}{2}$

(2 $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{u_{n+1}+1}{u_n+1}=\frac{\frac{1}{2}u_n-\frac{1}{2}+1}{u_n+1}=\frac{\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{2}}{u_n+1}=\frac{\frac{1}{2}(u_n+1)}{u_n+1}=\frac{1}{2}=q$

اذن: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0=4$

(3 كتابة v_n بدلالة n

بما أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0=4$

فان: $v_n=v_0\times q^n$ أي: $v_n=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

استنتاج u_n بدلالة n

لدينا: $v_n=u_n+1$ اذن: $v_n-1=u_n$

أي: $u_n=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^n-1$

(4 $S=v_0+v_1+v_2+\cdots+v_n$

$$S_n=v_0\times\frac{1-q^{n-0+1}}{1-q}=3\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=3\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}=6\times\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

تمرين8 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$\forall n\in\mathbb{N}\ \begin{cases}u_{n+1}=\frac{3}{2}u_n-1\\ u_0=-1\end{cases}$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $\forall n\in\mathbb{N}\ v_n=u_n-2$

1. أحسب u_1 و u_2 و v_0 و v_1
2. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{2}$
3. أكتب v_n بدلالة n و استنتج u_n بدلالة n

الجواب:(1 نعوض n ب0 فنجد:

$u_{0+1}=\frac{3}{2}\times u_0-1=\frac{3}{2}\times(-1)-1=-\frac{3}{2}-1=-\frac{3}{2}-\frac{2}{2}=-\frac{5}{2}$ اذن : $u_1=-\frac{5}{2}$

نعوض n ب 1 فنجد :

اذن : $u_{1+1}=\frac{3}{2}\times u_1-1=\frac{3}{2}\times\left(-\frac{5}{2}\right)-1=-\frac{15}{4}-1=-\frac{15}{4}-\frac{4}{4}=-\frac{19}{4}$ $u_2=-\frac{15}{4}$

نعوض n ب 0 فنجد : $v_0=u_0-2=-1-2=-3$

نعوض n ب 1 فنجد : $v_1=-\frac{5}{2}-2=-\frac{5}{2}-\frac{4}{2}=-\frac{9}{2}$

(2 $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{u_{n+1}-2}{u_n-2}=\frac{\frac{3}{2}u_n-1-2}{u_n-2}=\frac{\frac{3}{2}u_n-3}{u_n-2}=\frac{\frac{3}{2}u_n-\frac{6}{2}}{u_n-2}=\frac{\frac{3}{2}(u_n-2)}{u_n-2}=\frac{3}{2}=q$

اذن: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{3}{2}$ وحدها الأول $v_0=4$

(3 كتابة v_n بدلالة n

بما أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{3}{2}$ وحدها الأول $v_0=-3$

فان: $v_n=(-3)\times\left(\frac{3}{2}\right)^n$

استنتاج u_n بدلالة n

لدينا: $v_n=u_n-2$ اذن: $v_n+2=u_n$ أي: $u_n=-3\left(\frac{3}{2}\right)^n+2$

<u>تمرين9</u>: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n\in\mathbb{N}\ \begin{cases} u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n-3 \\ u_0=2 \end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n=u_n+6 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

1. أحسب u_1 و u_2 و v_0 و v_1
2. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$
3. أكتب v_n بدلالة n و استنتج u_n بدلالة n

الجواب:(1) نعوض n ب0 فنجد: $u_{0+1}=\frac{1}{2}\times u_0-3=\frac{1}{2}\times 2-3=1-3=-2$ اذن : $u_1=-2$

نعوض n ب 1 فنجد : $u_{1+1}=\frac{1}{2}\times u_1-3=\frac{1}{2}\times(-2)-3=-1-3=-4$ اذن : $u_2=-\frac{15}{4}$

نعوض n ب 0 فنجد : $v_0=u_0+6=2+6=8$

نعوض n ب 1 فنجد : $v_1=u_1+6=-2+6=4$

(2 $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{u_{n+1}+6}{u_n+6}=\frac{\frac{1}{2}u_n-3+6}{u_n+6}=\frac{\frac{1}{2}u_n+3}{u_n+6}=\frac{\frac{1}{2}u_n+\frac{6}{2}}{u_n+6}=\frac{\frac{1}{2}(u_n+6)}{u_n+6}=\frac{1}{2}=q$

اذن: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0=8$

(3 كتابة v_n بدلالة n

بما أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0=8$

فان: $v_n=8\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

استنتاج u_n بدلالة n

لدينا: $v_n=u_n+6$ اذن: $v_n-6=u_n$ أي: $u_n=8\left(\frac{1}{2}\right)^n-6$

تمرين10: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\forall n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1 \\ u_0 = 10 \end{cases}$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n - 3$

1. أحسب u_1 و u_2 و v_0 و v_1

2. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$

3. أكتب v_n بدلالة n و استنتج u_n بدلالة n

الجواب:1) نعوض n ب0 فنجد: $u_{0+1} = \frac{2}{3}\times u_0 + 1 = \frac{2}{3}\times 10 + 1 = \frac{20}{3} + 1 = \frac{20}{3} + \frac{3}{3} = \frac{23}{3}$ اذن : $u_1 = \frac{23}{3}$

نعوض n ب 1 فنجد : $u_{1+1} = \frac{2}{3}\times u_1 1 = \frac{2}{3}\times\frac{23}{3} + 1 = \frac{46}{9} + 1 = \frac{46}{9} + \frac{9}{9} = \frac{55}{9}$ اذن : $u_2 = \frac{55}{9}$

نعوض n ب 0 فنجد : $v_0 = u_0 - 3 = 10 - 3 = 7$

نعوض n ب 1 فنجد : $v_1 = u_1 - 3 = \frac{23}{3} - 3 = \frac{23}{3} - \frac{9}{3} = \frac{14}{3}$

2) $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - 3}{u_n - 3} = \frac{\frac{2}{3}u_n + 1 - 3}{u_n - 3} = \frac{\frac{2}{3}u_n - 2}{u_n - 2} = \frac{\frac{2}{3}u_n - \frac{6}{2}}{u_n - 2} = \frac{\frac{2}{3}(u_n - 3)}{u_n - 2} = \frac{2}{3} = q$

اذن: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{3}{2}$ وحدها الأول $v_0 = 7$

3) كتابة v_n بدلالة n

بما أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ وحدها الأول $v_0 = 7$

فان: $v_n = 7\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$

استنتاج u_n بدلالة n

لدينا: $v_n = u_n - 3$ اذن: $v_n + 3 = u_n$ أي: $u_n = 7\left(\frac{2}{3}\right)^n + 3$