

درس المعادلات التفاضلية:

$$f(x) = \alpha e^{4x} + \beta e^{3x} \quad (2)$$

$$f'(x) = (\alpha e^{4x} + \beta e^{3x})' = 4\alpha e^{4x} + 3\beta e^{3x} : f'(x) \text{ بحسب}$$

$$\begin{cases} \beta = -\alpha \\ 4\alpha - 3\alpha = 1 \end{cases} \text{ يعني } \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 4\alpha + 3\beta = 1 \end{cases} \text{ يعني } \begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 1 \end{cases}$$

$$f(x) = e^{4x} - e^{3x} \text{ ومنه } \begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

مثال 2: (1) حل المعادلة التفاضلية: $y'' - 2y' + y = 0$ (E)

(2) حدد الدالة f حل المعادلة (E) التي تحقق $f(0) = 0$

$$f'(0) = 1 \text{ و}$$

أجوبة: (1) المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية (E) هي:

$$r^2 - 2r + 1 = 0 \text{ ولدينا: } \Delta = 0, \text{ إذن المعادلة المميزة تقبل حل}$$

$$\text{حقيقي مزدوج } r_0 \text{, هو: } r_0 = 1$$

و بالتالى حلول المعادلة التفاضلية (E) هي الدوال المعرفة على \mathbb{R}

بما يلي: $x \mapsto (\alpha x + \beta)e^{1x}$ حيث α و β عدنان حقيقيان.

$$f(x) = (\alpha x + \beta)e^x \quad (2) \text{ بحسب } f'(x)$$

$$f'(x) = ((\alpha x + \beta)e^x)' = ((\alpha x + \beta))' e^x + (\alpha x + \beta)(e^x)'$$

$$f'(x) = (\alpha x + \alpha + \beta)e^x$$

$$\begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 1 \end{cases} \text{ يعني } \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases} \text{ يعني } \begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 1 \end{cases}$$

$$\text{ومنه: } f(x) = (1x + 0)e^x \text{ يعني } f(x) = xe^x$$

مثال 3: حل المعادلة التفاضلية: $y'' + y' + \frac{5}{2}y = 0$

$$\text{الجواب: المعادلة المميزة: } r^2 + y + \frac{5}{2} = 0$$

ولدينا: $\Delta = -9 = (3i)^2$, إذن المعادلة المميزة تقبل حلين عقديين

مترافقين وبعد الحساب

$$\text{نجد: } z = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \text{ ؛ } \bar{z} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \text{ ومنه:}$$

$$((\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2) y(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \left(\alpha \cos\left(\frac{3}{2}x\right) + \beta \sin\left(\frac{3}{2}x\right) \right)$$

حظ سعيد



خاصية 1: ليكن a عددا حقيقيا.

حلول المعادلة التفاضلية $y' = ay$ هي الدوال العددية المعرفة على \mathbb{R} بما يلي:

$$x \mapsto ke^{ax} \text{ حيث } k \in \mathbb{R}$$

مثال: حلول المعادلة التفاضلية: $y' = 4y$ هي الدوال العددية المعرفة على \mathbb{R}

$$\text{بما يلي: } x \mapsto ke^{4x} \text{ حيث } k \in \mathbb{R}$$

خاصية 2: ليكن a و b عددين حقيقيين غير منعدمين.

حلول المعادلة التفاضلية: $y' = ay + b$ هي الدوال العددية المعرفة على \mathbb{R} بما

$$\text{يلي: } x \mapsto ke^{ax} - \frac{b}{a} \text{ حيث } k \in \mathbb{R}$$

مثال 1: حل المعادلة التفاضلية: $2y' - 4y - 3 = 0$ (E)

الجواب: نكتبها أولا على الشكل: $y' = ay + b$

$$2y' - 4y - 3 = 0 \text{ يعني } 2y' = 4y + 3$$

$$\text{يعني } y' = 2y + \frac{3}{2} \text{ يعني } y' = \frac{4y + 3}{2} \text{ و } a = 2 \text{ و } b = \frac{3}{2}$$

ومنه: حلول المعادلة التفاضلية: (E) هي الدوال العددية المعرفة

$$\text{على } \mathbb{R} \text{ بما يلي: } x \mapsto ke^{2x} - \frac{3}{4} \text{ حيث } k \in \mathbb{R}$$

خاصية 3: لتكن المعادلة التفاضلية: $y'' + ay' + by = 0$ و معادلتها

$$\text{المميزة } r^2 + ar + b = 0 \text{ حيث } a \text{ و } b \text{ عدنان حقيقيان}$$

• إذا كانت المعادلة المميزة تقبل حلين حقيقيين مختلفين r_1 و r_2 , فإن حلول

المعادلة تفاضلية (E) هي الدوال المعرفة على \mathbb{R} على بما

$$\text{يلي: } x \mapsto \alpha e^{r_1x} + \beta e^{r_2x} \text{ حيث } \alpha \text{ و } \beta \text{ عدنان حقيقيان.}$$

• إذا كانت للمعادلة المميزة حل حقيقي مزدوج r_0 , فإن حلول المعادلة

التفاضلية (E) هي الدوال المعرفة على \mathbb{R} على بما

$$\text{يلي: } x \mapsto (\alpha x + \beta)e^{r_0x} \text{ حيث } \alpha \text{ و } \beta \text{ عدنان حقيقيان.}$$

• إذا كانت المعادلة المميزة تقبل حلين عقديين مترافقين $r_1 = p + iq$

و $r_2 = p - iq$, فإن حلول المعادلة التفاضلية (E) هي الدوال المعرفة على \mathbb{R}

على بما يلي: $x \mapsto e^{px} (\alpha \cos qx + \beta \sin qx)$ حيث α و β عدنان

حقيقيان.

مثال 1: حل المعادلة التفاضلية: $y'' - 7y' + 12y = 0$ (E)

(2) حدد الدالة f حل المعادلة (E) التي تحقق $f(0) = 0$

$$\text{و } f'(0) = 1$$

أجوبة: (1) المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية (E) هي:

$$r^2 - 7r + 12 = 0 \text{ ولدينا: } \Delta = 1, \text{ إذن المعادلة المميزة تقبل حلين}$$

حقيقيين مختلفين هما: $r_1 = 3$ و $r_2 = 4$ و بالتالى حلول المعادلة

التفاضلية (E) هي الدوال المعرفة على \mathbb{R} بما يلي:

$$x \mapsto \alpha e^{4x} + \beta e^{3x} \text{ حيث } \alpha \text{ و } \beta \text{ عدنان حقيقيان.}$$