

## درس الأعداد العقدية الجزء 2:

المعادلة حلا حقيقيا مزدوجا هو:  $z = -\frac{b}{2a} = 1$  إذن:  $S = \{1\}$

**نتيجة:** ليكن  $z_1$  و  $z_2$  حلي المعادلة  $(a \neq 0)az^2 + bz + c = 0$  في المجموعة  $\mathbb{C}$ , لدينا:  $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$

لكل  $z$  من  $\mathbb{C}$   $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$  و  $z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}$

### II. الترميز الأسّي لعدد عقدي غير منعدم

**تعريف:** كل عدد عقدي  $z$  غير منعدم, معياره  $r$  و  $\theta$  عمدة له يكتب على الشكل  $re^{i\theta}$  هذه الكتابة تسمى ترميزا أسيا للعدد العقدي  $z$

**مثال:** ليكن:  $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ , لدينا:  $|z| = 2$  و  $\arg z \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$

إذن  $z = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$  هي ترميز أسّي للعدد العقدي  $z$

**خصائص:** ليكن  $r$  و  $r'$  عددين حقيقيين موجبين قطعا و  $\theta$  و  $\theta'$  عددين حقيقيين:

$$(1) re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')} \quad (2) re^{i\theta} = re^{-i\theta} \quad (3) re^{i\theta} = re^{i(\theta+\pi)}$$

$$(4) \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta} \quad (5) \frac{r'e^{i\theta'}}{re^{i\theta}} = \frac{r'}{r}e^{i(\theta'-\theta)} \quad (6) (re^{i\theta})^n = r^n re^{in\theta}$$

**III. صيغتا أولير:** ليكن  $\theta$  عددا حقيقيا, لدينا:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad \text{و} \quad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{و} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$
 وهي صيغتا أولير

ولكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  و  $\theta$  من  $\mathbb{R}$  لدينا:

$$e^{in\theta} - e^{-in\theta} = 2i\sin(n\theta) \quad \text{و} \quad e^{in\theta} + e^{-in\theta} = 2\cos(n\theta)$$

**مثال:** بين أن:  $\cos^3\theta = \frac{1}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}\cos\theta$  لكل  $\theta$  من  $\mathbb{R}$

أو سؤال بطريقة أخرى: قم باخطا:  $\cos^3\theta$

**الجواب:** ليكن  $\theta \in \mathbb{R}$  لدينا:  $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

إذن  $\cos^3\theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^3 = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2}$  و منه:

$$\cos^3\theta = \frac{1}{8} \left( (e^{i\theta})^3 + 3(e^{i\theta})^2 \cdot e^{-i\theta} + 3e^{i\theta} \cdot (e^{-i\theta})^2 + (e^{-i\theta})^3 \right)$$

$$\cos^3\theta = \frac{1}{8} (e^{i3\theta} + 3e^{i2\theta} \cdot e^{-i\theta} + 3e^{i\theta} \cdot e^{-i2\theta} + e^{-i3\theta})$$

$$= \frac{1}{8} (2\cos 3\theta + 3 \times 2\cos\theta) = \frac{1}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}\cos\theta$$

### IV. صيغة موافر

ليكن  $\theta$  عددا حقيقيا و  $n$  عنصرا من  $\mathbb{N}$ , لدينا:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

هذه المتساوية تسمى صيغة موافر, و تكتب أيضا:  $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

### I. المعادلات من الدرجة الثانية بمجهول واحد في المجموعة $\mathbb{C}$

**1** ليكن  $a$  عددا حقيقيا غير منعدم حلا المعادلة:  $z^2 = a$  في المجموعة  $\mathbb{C}$  هما:

$$\sqrt{a} \quad \text{و} \quad -\sqrt{a} \quad \text{إذا كان } a > 0$$

$$i\sqrt{-a} \quad \text{و} \quad -i\sqrt{-a} \quad \text{إذا كان } a < 0$$

**مثال 1:** حل في المجموعة  $\mathbb{C}$  المعادلة التالية:  $z^2 = 5$

$$z^2 = 5 \quad \text{يعني: } z = \sqrt{5} \quad \text{و} \quad z = -\sqrt{5}$$

$$\text{ومنه: } S = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$$

**مثال 2:** حل في المجموعة  $\mathbb{C}$  المعادلة التالية:  $z^2 = -3$

$$z^2 = -3 \quad \text{يعني } z = \sqrt{3}i \quad \text{و} \quad z = -\sqrt{3}i$$

$$\text{ومنه: } S = \{-\sqrt{3}i; \sqrt{3}i\}$$

**2** حل في المجموعة  $\mathbb{C}$  المعادلة:

$$az^2 + bz + c = 0 \quad \text{حيث } a, b, c \text{ أعداد حقيقية و } a \text{ غير منعدم}$$

نحسب العدد الحقيقي  $\Delta = b^2 - 4ac$  مميز المعادلة

$$az^2 + bz + c = 0$$

■ إذا كان  $\Delta > 0$  فإن المعادلة تقبل حلين حقيقيين هما:

$$z' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad z = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

■ إذا كان  $\Delta = 0$  فإن المعادلة تقبل حلا حقيقيا مزدوجا هو:  $z = -\frac{b}{2a}$

■ إذا كان  $\Delta < 0$  فإن المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين و مختلفين

$$\text{هما: } z' = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad z = \frac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2a}$$

**مثال 1:** لنحل في المجموعة  $\mathbb{C}$  المعادلة:  $(E): z^2 - z + 2 = 0$

مميز المعادلة  $(E)$  هو: .

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(2) = -7 = (i\sqrt{7})^2$$

حلا المعادلة  $(E)$  هما:  $z_1 = \frac{1 + i\sqrt{7}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}$  و

$$S = \left\{ \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}; \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2} \right\} \quad \text{إذن: } z_2 = \bar{z}_1 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}$$

**مثال 2:** لنحل في المجموعة  $\mathbb{C}$  المعادلة:  $(E): z^2 - z - 2 = 0$

مميز المعادلة  $(E)$  هو:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(-2) = 9 = (3)^2$$

حلا المعادلة  $(E)$  هما:  $z_1 = \frac{1-3}{2} = -1$  و  $z_2 = \frac{1+3}{2} = 2$

$$\text{إذن: } S = \{-1; 2\}$$

**مثال 3:** لنحل في المجموعة  $\mathbb{C}$  المعادلة:  $(E): z^2 - 2z + 1 = 0$

**الجواب:** مميز المعادلة  $(E)$  هو:  $\Delta = b^2 - 4ac = 0$