الهندسة

مذكرة رقم11 : ملخص لدرس: الحساب المثلثي 2 مع تمارين وأمثلة محلولة

الأهداف والقدرات المنتظرة من الدرس :

الجزء الثاني: - التمثيل المبياني للدالتين sin و cos - المعادلات والمتراجحات المثلثية الأساسية: $\sin x = a$ ، $\cos x = a$ ، $\tan x = a$ $\sin x \ge a$ ، $\cos x \ge a$ ، $\tan x \ge a$ $\sin x \le a$ ، $\cos x \le a$ ، $\tan x \le a$ - الزوايا المحيطية, الرباعيات الدائرية؛ - العلاقات: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ ؛ $s = \frac{1}{2}ab\sin C$ ، $s = pr$ ؛	- التمكن من رسم منحنى كل من الدالتين sin و cos واستثماره في إدراك وتثبيت مفاهيم الدورية والزوجية والرتابة ... - التمكن من تمثيل وقراءة حلول معادلة أو متراجحة مثلثية على الدائرة المثلثية؛	- يمكن بمناسبة إنشاء التمثيل المبياني للدالتين cos وsin، التعرض إلى مفهوم الدالة الدورية (تعريفه وإعطاء بعض العلاقات المميزة له). - يعتبر حل المعادلات والمتراجحات المثلثية المحددة في البرنامج مناسبة لتعميق التعامل مع الدائرة المثلثية. - تعتبر دراسة الزوايا المحيطية والرباعيات الدائرية مناسبة لتثبيت وتقوية مكتسبات التلاميذ في جل مفاهيم الهندسة المستوية وإثبات بعض العلاقات في المثلث.

I. التمثيل المبياني للدالتين cos و sin

دراسة وتمثيل الدالة sin :

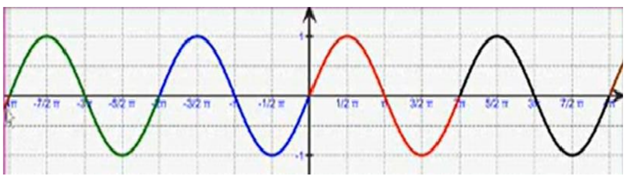
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y	0	0.5	1	0.5	0	-0.5	-1	-0.5	0

رسم منحنى الجيب : $y = \sin x$

كنشاط يقوم التلاميذ بملا الجدول التالي و رسم التمثيل المبياني على المجال : $[0;2\pi]$

ماذا تلاحظ بالنسبة لمنحنى الدالة sin؟ أصغير قيمة ؟ أكبر قيمة ؟

بنفس الطريقة نرسم التمثيل المبياني على المجال : $\mathbb{R}$



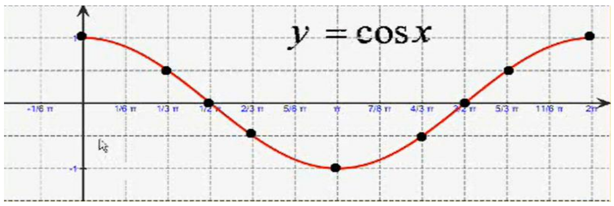
نلاحظ أن التمثيل المبياني يكرر نفسه على كل مجال سعته 2π

لذلك نقول ان الدالة دورية ودورها $T = 2\pi$

دراسة وتمثيل الدالة cos :

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	1	0.5	0	-0.5	-1	-0.5	0	0.5	1

رسم منحنى الجيب : $y = \cos x$ و كنشاط يقوم التلاميذ بملا الجدول التالي و رسم التمثيل المبياني على المجال : $[0;2\pi]$



ماذا تلاحظ بالنسبة لمنحنى الدالة cos؟ أصغير قيمة ؟ أكبر قيمة ؟

بنفس الطريقة نرسم التمثيل المبياني على: $\mathbb{R}$

نلاحظ أن التمثيل المبياني يكرر نفسه على كل مجال سعته 2π

لذلك نقول ان الدالة دورية ودورها $T = 2\pi$

II. المعادلات المثلثية الأساسية:

خاصية1 : $a \in \mathbb{R}$ و نعتبر المعادلة : $(E): \cos x = a$

- اذا كان : $a \succ 1$ أو $a \prec -1$ فإن المعادلة : $\cos x = a$ ليس لها حلولا في $\mathbb{R}$.
- اذا كان : $-1 \le a \le 1$ فانه يوجد $x_0 \in \mathbb{R}$ بحيث $\cos x = \cos x_0$

وحلول المعادلة $(E): \cos x = a$ في $\mathbb{R}$ هي الأعداد الحقيقية :

$x_0 + 2k\pi$ أو $-x_0 + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

مثال1: 1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $\cos x = \frac{1}{2}$

2) حل في المجال: $]-\pi,\pi]$ المعادلة : $\cos x = \frac{1}{2}$

الجواب:1) $\cos x = \frac{1}{2}$ يعني $\cos x = \cos\frac{\pi}{3}$

وحلول المعادلة هي : $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ أو $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

ومنه : $S = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$

2)نقوم بالتأطير: (أ $-\pi < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \le \pi$ يعني $-1 < \frac{1}{3} + 2k \le 1$

يعني $1 - \frac{1}{3} < \frac{1}{3} + 2k - \frac{1}{3} \le 1 - \frac{1}{3}$ يعني $-\frac{4}{3} < 2k \le \frac{2}{3}$

يعني $-\frac{4}{3}\times\frac{1}{2}<2k\times\frac{1}{2}\le\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}$ يعني $-\frac{2}{3}<k\le\frac{1}{3}$ يعني

$-0.66\simeq-\frac{2}{3}<k\le\frac{1}{3}\simeq0.33$ اذن : $k=0$

ومنه: نعوض k ب 0 في $\frac{\pi}{3}+2k\pi$ فنجد : $x_1=\frac{\pi}{3}+2\times0\times\pi$

أي : $x_1=\frac{\pi}{3}$

ب) نقوم بنفس عملية التأطير: $-\pi<-\frac{\pi}{3}+2k\pi\le\pi$ يعني

يعني $-1<-\frac{1}{3}+2k\le1$ يعني $-1+\frac{1}{3}<-\frac{1}{3}+2k+\frac{1}{3}\le1+\frac{1}{3}$ يعني

$-\frac{2}{3}<2k\le\frac{4}{3}$

يعني $-\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}<2k\times\frac{1}{2}\le\frac{4}{3}\times\frac{1}{2}$ يعني $-\frac{1}{3}<k\le\frac{2}{3}$ يعني

$-0.33\simeq-\frac{1}{3}<k\le\frac{2}{3}\simeq0.66$ اذن : $k=0$

ومنه: نعوض k ب 0 في $-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ فنجد :

$x_1=-\frac{\pi}{3}+2\times0\times\pi$

أي : $x_1=-\frac{\pi}{3}$ وبالتالي : $S=\left\{-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right\}$

مثال2: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $\cos x=2$

الجواب: لدينا : $a=2>1$ ومنه : فان المعادلة : $\cos x=2$ ليس لها حلولا في $\mathbb{R}$ أي : $S=\varnothing$

خاصية2 : $a\in\mathbb{R}$ و نعتبرالمعادلة : $(E):\sin x=a$

اذا كان : $a\succ1$ أو $a\prec-1$ فان المعادلة : (E) ليس لها حلولا في $\mathbb{R}$.

اذا كان : $-1\le a\le1$ فانه يوجد $x_0\in\mathbb{R}$ بحيث $\sin x=\sin x_0$

وحلول المعادلة (E) في $\mathbb{R}$. هي الأعداد الحقيقية : $x_0+2k\pi$ أو $\pi-x_0+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

مثال: 1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) حل في المجال: $]-\pi,\pi]$ المعادلة : $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

الجواب:1) $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ يعني $\sin x=\sin\frac{\pi}{3}$

وحلول المعادلة هي : $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ أو $x=\pi-\frac{\pi}{3}+2k\pi=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$

ومنه : $S=\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{2\pi}{3}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

2)نقوم بالتأطير (أ: $-\pi<\frac{\pi}{3}+2k\pi\le\pi$ يعني $-1<\frac{1}{3}+2k\le1$

يعني $1-\frac{1}{3}<\frac{1}{3}+2k-\frac{1}{3}\le1-\frac{1}{3}$ يعني $-\frac{4}{3}<2k\le\frac{2}{3}$

يعني $-\frac{4}{3}\times\frac{1}{2}<2k\times\frac{1}{2}\le\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}$ يعني $-\frac{2}{3}<k\le\frac{1}{3}$ يعني

$-0.66\simeq-\frac{2}{3}<k\le\frac{1}{3}\simeq0.33$ اذن : $k=0$

ومنه: نعوض k ب 0 في $\frac{\pi}{3}+2k\pi$ فنجد : $x_1=\frac{\pi}{3}+2\times0\times\pi$ أي: $x_1=\frac{\pi}{3}$

ب) نقوم بنفس عملية التأطير: $-\pi<\frac{2\pi}{3}+2k\pi\le\pi$ يعني

يعني $-1<\frac{2}{3}+2k\le1$ يعني $-1+\frac{2}{3}<2k\le1+\frac{2}{3}$ يعني $-\frac{1}{3}<2k\le\frac{5}{3}$

يعني $-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}<2k\times\frac{1}{2}\le\frac{5}{3}\times\frac{1}{2}$ يعني $-\frac{1}{6}<k\le\frac{5}{6}$ اذن : $k=0$

ومنه: نعوض k ب 0 في $\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ فنجد :

$x_1=\frac{2\pi}{3}+2\times0\times\pi$

أي : $x_1=\frac{2\pi}{3}$ وبالتالي : $S=\left\{\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right\}$

خاصية3 : $a\in\mathbb{R}$ و نعتبر المعادلة : $(E):\tan x=a$

يوجد $x_0\in\mathbb{R}$ بحيث $\tan x=\tan x_0$; وحلول المعادلة (E) في $\mathbb{R}$. هي الأعداد الحقيقية : $x_0+k\pi$ أو حيث $k\in\mathbb{Z}$

هي الأعداد الحقيقية : $x_0+k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

مثال: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $\tan x=1$

الجواب:

$\tan x=1$ يعني $\tan x=\tan\frac{\pi}{4}$ يعني $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

ومنه : $S=\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

ملخص: من أجل كل عددين حقيقيين x و y.

$\cos x=\cos y$ تكافئ أو	$\begin{cases}x=y+2k\pi\\x=-y+2k\pi\end{cases}$ $k\in\mathbb{Z}$
$\sin x=\sin y$ تكافئ أو	$\begin{cases}x=y+2k\pi\\x=(\pi-y)+2k\pi\end{cases}$ $k\in\mathbb{Z}$
$\tan x=\tan y$ تكافئ	$x=y+k\pi$ $k\in\mathbb{Z}$

تمرين 1: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

الجواب:1) $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ يعني $\cos x=\cos\frac{\pi}{6}$

وحلول المعادلة هي : $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ أو $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$

ومنه : $S=\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{6}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

تمرين 2: 1) حل في $[0,2\pi[$ المعادلة : $\cos x=-\frac{1}{2}$

2) حل في $[0,2\pi[$ المعادلة : $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

الجواب:1) $\cos x=-\frac{1}{2}$ يعني $\cos x=-\cos\frac{\pi}{3}$ يعني $\cos x=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$

لأن: $\cos(\pi-x)=-\cos x$

$\cos x=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$ يعني $\cos x=\cos\frac{2\pi}{3}$ يعني

$x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ أو $x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi$

نقوم بالتأطير: أ) $0\le\frac{2\pi}{3}+2k\pi<2\pi$ يعني $0\le\frac{2}{3}+2k<2$

يعني $-\frac{2}{3}\le2k<2-\frac{2}{3}$ يعني $-\frac{1}{3}\le k<\frac{2}{3}$

يعني $-0.33\simeq-\frac{1}{3}<k\le\frac{2}{3}\simeq0.66$ اذن : $k=0$

ومنه: نعوض k ب 0 في $\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ فنجد : $x_1=\frac{2\pi}{3}+2\times0\times\pi$

أي : $x_1=\frac{2\pi}{3}$

ب) نقوم بنفس عملية التأطير : $0\le-\frac{2\pi}{3}+2k\pi<2\pi$ يعني

يعني $0\le-\frac{2}{3}+2k<2$ يعني $\frac{2}{3}\le2k<2+\frac{2}{3}$ يعني $\frac{1}{3}\le k<\frac{4}{3}$

يعني $0.33\simeq\frac{1}{3}<k\le\frac{4}{3}\simeq1.33$ اذن : $k=1$

ومنه :نعوض k ب 1 في $-\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ فنجد : $x_1=-\frac{2\pi}{3}+2\times1\times\pi$

أي : $x_2=\frac{4\pi}{3}$ وبالتالي : $S=\left\{\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3}\right\}$

2) $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ يعني $\sin x=-\sin\frac{\pi}{4}$ يعني $\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

لأن: $\sin(-x)=-\sin x$

$\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ يعني $x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ أو $x=\pi+\frac{\pi}{4}+2k\pi=\frac{5\pi}{4}+2k\pi$

نقوم بالتأطير:أ) $0\le-\frac{\pi}{4}+2k\pi<2\pi$ يعني $0\le-\frac{1}{4}+2k<2$

يعني $\frac{1}{4}\le 2k<2+\frac{1}{4}$ يعني $\frac{1}{8}\le k<\frac{9}{8}$ اذن : $k=1$

ومنه :نعوض k ب 1 فنجد : $x_1=-\frac{\pi}{4}+2\times1\times\pi$ أي : $x_1=\frac{7\pi}{4}$

ب) نقوم بنفس عملية التأطير : $0\le\frac{5\pi}{4}+2k\pi<2\pi$ يعني

$0\le\frac{5}{4}+2k<2$ يعني $-\frac{5}{4}\le 2k<2-\frac{5}{4}$ يعني $-\frac{5}{8}\le k<\frac{3}{8}$

اذن : $k=0$ ومنه :نعوض k ب à فنجد : $x_2=\frac{5\pi}{4}$

وبالتالي : $S=\left\{\frac{5\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right\}$

III.معادلات خاصة:

$\cos x=1$ تكافئ $x=2k\pi$	
$\cos x=0$ تكافئ $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$	$k\in\mathbb{Z}$
$\cos x=-1$ تكافئ $x=(2k+1)\pi$	
$\sin x=1$ تكافئ $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$	
$\sin x=0$ تكافئ $x=k\pi$	$(k\in\mathbb{Z})$
$\sin x=-1$ تكافئ $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$	

مثال: حل في $[0,3\pi]$ معادلة : $\sin x=0$

الجواب: $\sin x=0$ يعني $x=k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

نقوم بالتأطير: $0\le k\pi\le 3\pi$ يعني $0\le k\le 3$

اذن : $k=0$ أو $k=1$ أو $k=2$ أو $k=3$

ومنه:نعوض k بهذه القيم فنجد:

$x_0=0\times\pi$ أو $x_1=1\times\pi$ أو $x_2=2\times\pi$ أو $x_3=3\times\pi$

أي : $x_0=0$ أو $x_1=\pi$ أو $x_2=2\pi$ أو $x_3=3\pi$

وبالتالي : $S=\{0;\pi;2\pi;3\pi\}$

تمرين 3: حل في ال $[-\pi,2\pi[$ معادلة : $\cos x\left(\sqrt{2}\sin x-1\right)=0$

ومثل الحلول على الدائرة المثلثية

الجواب: $\cos x\left(\sqrt{2}\sin x-1\right)=0$ يعني $\cos x=0$ أو $\sqrt{2}\sin x-1=0$

يعني $\cos x=0$ أو $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

يعني $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ أو $\sin x=\sin\frac{\pi}{4}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

يعني $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ أو $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ أو $x=\pi-\frac{\pi}{4}+2k\pi=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$

نقوم بالتأطير:أ) $-\pi\le\frac{\pi}{2}+k\pi<2\pi$ يعني $-1\le\frac{1}{2}+k<2$

يعني $-1-\frac{1}{2}\le k<2-\frac{1}{2}$ يعني $-\frac{3}{2}\le k<\frac{3}{2}$

اذن : $k=0$ أو $k=1$ أو $k=-1$

ومنه:نعوض k بهذه القيم فنجد:

$x_1=\frac{\pi}{2}+0\times\pi$ أو $x_2=\frac{\pi}{2}+1\times\pi$ أو $x_3=\frac{\pi}{2}-1\times\pi$

أي : $x_1=\frac{\pi}{2}$ أو $x_2=\frac{3\pi}{2}$ أو $x_3=-\frac{\pi}{2}$

التأطير:ب) $-\pi\le\frac{\pi}{4}+2k\pi<2\pi$ يعني $-1\le\frac{1}{4}+2k<2$

يعني $-1-\frac{1}{4}\le 2k<2-\frac{1}{4}$ يعني $-\frac{5}{4}\le 2k<\frac{7}{4}$ يعني $-\frac{5}{8}\le k<\frac{7}{8}$

اذن : $k=0$ ومنه :نعوض k ب 0 فنجد : $x_4=\frac{\pi}{4}$

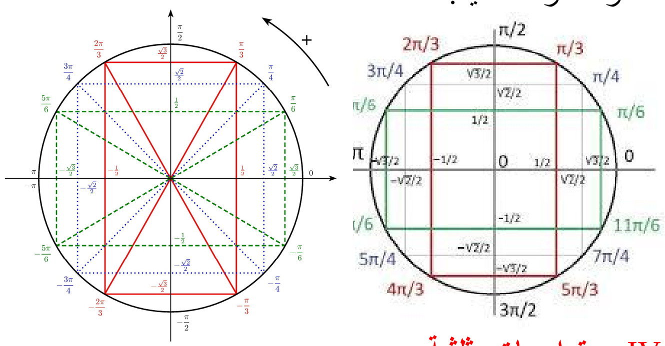
ج) نقوم بعملية التأطير : $-\pi\le\frac{3\pi}{4}+2k\pi<2\pi$

يعني $-1\le\frac{3}{4}+2k<2$ يعني $-1-\frac{3}{4}\le 2k<2-\frac{3}{4}$ يعني $-\frac{7}{8}\le k<\frac{5}{8}$

اذن : $k=0$ ومنه :نعوض k ب 0 فنجد : $x_5=\frac{3\pi}{4}$

وبالتالي : $S=\left\{-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2};\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right\}$

أنظر الدائرة المثلثية:



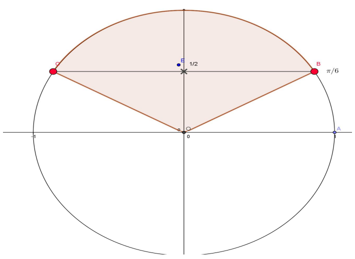
IV. متراجحات مثلثية:

حل هذه المتراجحات اعتمادا على الدائرة المثلثية و مثل على الدائرة المثلثية حلول المتراجحة:

مثال1: حل في المجال : $[0,2\pi[$ المتراجحة: $\sin x\ge\frac{1}{2}$

الجواب : $\sin x\ge\frac{1}{2}$ يعني $\sin x\ge\sin\frac{\pi}{6}$

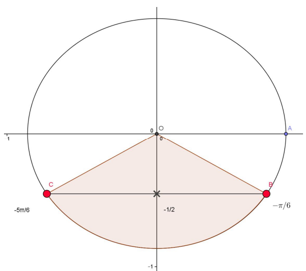
$S=\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$



تمرين4: حل في المجال $]-\pi,\pi]$: المتراجحة:

$\sin x\le-\frac{1}{2}$

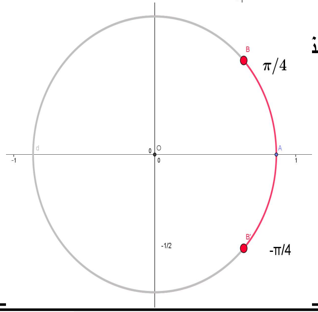
الجواب : $S=\left[-\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$



مثال2: حل في المجال : $]-\pi,\pi]$ الما

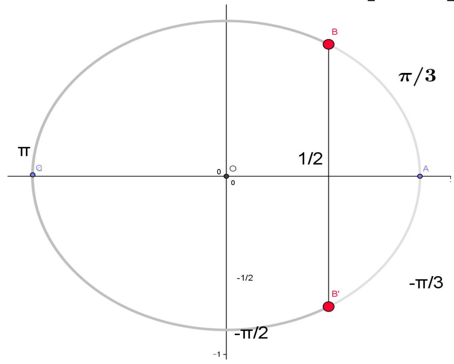
الجواب :

$S=\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$



تمرين 5: حل في المجال : $\left]-\frac{\pi}{2},\pi\right]$ المتراجحة: $\cos x \le \frac{1}{2}$

الجواب : $S=\left]-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$



تمرين 6: حل في المجال : $]-\pi,\pi]$ المتراجحات: 1) $\cos x \le 0$ 2) $\sin x \ge 0$

الأجوبة : 1) $S=\left]-\pi,-\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 2) $S=[0,\pi]$

مثال3: حل في المجال : $S=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ المتراجحة: $\tan x \ge 1$

الجواب : $S=\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$

V. علاقات sin في مثلث :

ABC مثلث بحيث : $AB=c$ و $AC=b$ و $BC=a$

نفترض أن ABC قائم الزاوية في A اذن : $\sin\hat{A}=1$ ومنه :

$\frac{a}{\sin\hat{A}}=a$

و لدينا كذلك : $\sin\hat{B}=\frac{b}{a}\Leftrightarrow a=\frac{b}{\sin\hat{B}}$

و لدينا كذلك : $\sin\hat{C}=\frac{c}{a}\Leftrightarrow a=\frac{c}{\sin\hat{C}}$

وبالتالي نجد : $\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}$

و هذه النتيجة تبقى صحيحة بالنسبة لمثلث عادي :

خاصية: اذا كان ABC مثلث بحيث : $AB=c$ و $AC=b$ و $BC=a$

فان : $\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}$

انتهى الدرس

ملاحظات عامة حول الدرس:

تمرين 7: ABC مثلث بحيث : $\hat{A}=\frac{\pi}{4}$ و $\hat{B}=\frac{\pi}{3}$ و $BC=4cm$

أحسب : $\hat{C}$ و $AC=b$ و AC

أجوبة: 1)حساب $\hat{C}$ لدينا: $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\pi$ يعني $\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}+\hat{C}=\pi$

يعني $\frac{4\pi}{12}+\frac{3\pi}{12}+\hat{C}=\pi$ يعني $\hat{C}=\pi-\frac{7\pi}{12}$ يعني $\hat{C}=\frac{5\pi}{12}$

1) حساب AC

لدينا: $\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{a}{\sin\hat{A}}$ يعني $\frac{b}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{4}{\sin\frac{\pi}{4}}$

يعني $AC\times\sin\frac{\pi}{4}=4\times\sin\frac{\pi}{3}$ يعني $AC=\frac{4\times\sin\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{4\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{4\times\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=2\sqrt{6}$

تمرين 8: حل في المجال $]-\pi,\pi]$ معادلة : $2\sin 2x-1=0$

الجواب: $2\sin 2x-1=0$ يعني $\sin 2x=\frac{1}{2}$ يعني

$\sin 2x=\sin\frac{\pi}{6}$ يعني $2x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ أو $2x=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi$

يعني $x=\frac{\pi}{12}+k\pi$ أو $x=\frac{5\pi}{12}+k\pi$ ونقوم بالتأطير ونجد :

$S=\left\{-\frac{11\pi}{12};-\frac{7\pi}{12};\frac{\pi}{12};\frac{5\pi}{12}\right\}$

تمرين 9: حل في المجال $\mathbb{R}$ معادلة : $(\sin x)^2+\sin x-2=0$

الجواب: نضع: $X=\sin x$ **والمعادلة تصبح :** $X^2+X-2=0$

نحسب المميز Δ: $a=1$ و $b=1$ و $c=-2$

$\Delta=b^2-4ac=1^2-4\times1\times(-2)=9=(3)^2>0$ بما أن $\Delta>0$ فان هذه

المعادلة لها حلين هما: $X_1=\frac{-1+3}{2\times1}=1$ **أو** $X_2=\frac{1-3}{2\times1}=-2$ ومنه

بالرجوع للمتغير الأصلي نجد :

$\sin x=1$ **أو** $\sin x=-2$

نلاحظ أن المعادلة الثانية ليس لها حل في $]-\pi,\pi]$

اذن فقط نحل المعادلة : $\sin x=1$ (**معادلة خاصة**)

$\sin x=1$ **يعني** : $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ **ومنه :** $S=\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$