

درس الحساب المتجهي

$$\overrightarrow{AC}(1; -1; -1) \text{ و } \overrightarrow{AB}(1; 0; -2)$$

$$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = -2\vec{i} - 1\vec{j} - 1\vec{k}$$

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ ومنه النقط A و B و C غير مستقيمة

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| \quad (2)$$

$$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \sqrt{6}$$

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ ومنه :}$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = -2\vec{i} - 1\vec{j} - 1\vec{k} \quad (3) \text{ متجهة منظمية على المستوى}$$

ABC ونعلم أن معادلة المستوى ABC تكتب على الشكل :

$$ax + by + cz + d = 0$$

ونعلم أن $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(-2; -1; -1)$ متجهة منظمية عليه اذن :

$$c = -1 \text{ و } b = -1 \text{ و } a = -2$$

$$\text{ومنه : } (ABC) -2x - 1y - 1z + d = 0$$

ونعلم أن: $A(0; 1; 2) \in (P)$ اذن احداثيات A تحقق المعادلة :

$$\text{يعني } 0 - 1 - 2 + d = 0 \text{ يعني } d = 3$$

$$\text{وبالتالي : } (ABC) -2x - 1y - 1z + 3 = 0$$

$$\text{يعني : } (ABC) 2x + y + z - 3 = 0$$

حساب مسافة نقطة عن مستقيم:

مسافة نقطة M من الفضاء عن المستقيم (D) المار من

$$d(M; D(A; \vec{u})) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} \text{ النقطة } A \text{ و } \vec{u} \text{ متجهة موجهة له هي:}$$

مثال: أحسب مسافة النقطة $M(2; 1; 1)$ عن المستقيم (D)

$$(D): \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - 3t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 4t \end{cases} \text{ المعروف بما يلي:}$$

الجواب: نبحث عن نقطة يمر من المستقيم ومتجهة موجهة له :

$$A(1; 1; 0) \in (D) \text{ ولدينا } (D): \begin{cases} x = 1 + 0t \\ y = 1 - 3t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 0 + 4t \end{cases}$$

و $\vec{u}(0; -3; 4)$ متجهة موجهة ل (D) ولدينا $\overrightarrow{AM}(1; 0; 1)$ و

$$\vec{u}(0; -3; 4)$$

$$\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = 3\vec{i} - 4\vec{j} - 3\vec{k}$$

$$d(M; D(A; \vec{u})) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + (-3)^2}}{\sqrt{0^2 + (-3)^2 + 4^2}} = \frac{\sqrt{34}}{5}$$

تعريف هندسي للجداء المتجهي: لتكن \vec{u} و \vec{v} متجهتين في الفضاء

الموجه الجداء المتجهي للمتجهتين \vec{u} و \vec{v} في هذا الترتيب، هو المتجهة التي

نرمز لها بالرمز $\vec{u} \wedge \vec{v}$ و المعرفة بما يلي:

• إذا كانت \vec{u} و \vec{v} مستقيمتين فان: $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

• إذا كانت \vec{u} و \vec{v} غير مستقيمتين فان $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$ بحيث:

$$\vec{w} \perp \vec{v} \text{ و } \vec{w} \perp \vec{u} \text{ و } (\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) \text{ أساس مباشر،}$$

يمكننا تحديد منحى المتجهة $\vec{u} \wedge \vec{v}$ باستعمال تقنية رجل أبيير واليد

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \text{ مع } \theta \text{ قياس للزاوية الهندسية } BAC \text{ حيث } \|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin \theta$$

$$\text{ و } \vec{v} = \overrightarrow{AC}$$

• مساحة المثلث ABC هي: $S_{ABC} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$

• مساحة متوازي أضلاع $ABCD$ هي: $S_{ABCD} = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$

• لتكن \vec{u} و \vec{v} و \vec{w} ثلاث متجهات من الفضاء و k عددا حقيقيا، لدينا:

$$\vec{u} \wedge (k\vec{v}) = k(\vec{u} \wedge \vec{v}) \text{ و } \vec{v} \wedge \vec{u} = -(\vec{u} \wedge \vec{v})$$

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w} \text{ و } (k\vec{u}) \wedge \vec{v} = k(\vec{u} \wedge \vec{v})$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$$

• تكون \vec{u} و \vec{v} متجهتين مستقيمتين إذا فقط إذا كان: $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

• لتكن \vec{u} و \vec{v} متجهتين من الفضاء، إحداثياتهما $(x; y; z)$ و

$$(x'; y'; z')$$

$(X; Y; Z)$ متلوث إحداثيات الجداء المتجهي $\vec{u} \wedge \vec{v}$ بحيث:

$$Z = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \text{ و } Y = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \text{ و } X = \begin{vmatrix} y & y' \\ x & x' \end{vmatrix}$$

مثال: $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ و $\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ أحسب $\vec{u} \wedge \vec{v}$

$$\vec{u}(1; 2; 1) \text{ و } \vec{v}(3; -2; -1)$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \vec{k} = \text{الجواب}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = 4\vec{j} - 8\vec{k}$$

طريقة: لتحديد معادلة ديكارتية لمستوى

$$ABC: ax + by + cz + d = 0$$

يمكننا أن نلاحظ أن $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ هي متجهة منظمية على المستوى ABC

مثال: نعتبر في الفضاء النقط $A(0; 1; 2)$ و $B(1; 1; 0)$ و $C(1; 0; 1)$

1. حدد إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ تأكد أن النقط A و B و C غير مستقيمة

غير مستقيمة

2. أحسب مساحة المثلث ABC

3. حدد معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

$$\text{الجواب (1): } \overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$$