الجبر

مذكرة رقم12 : ملخص لدرس: الدوال العددية مع تمارين وأمثلة محلولة

الأهداف والقدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
- عموميات: . مجموعة تعريف دالة عددية؛ . تساوي دالتين عدديتين؛ . التمثيل المبياني لدالة عددية؛ . الدالة الزوجية والدالة الفردية (التأويل المبياني)؛ - تغيرات دالة عددية؛ - القيم الدنيا والقيم القصوى لدالة عددية على مجال؛ - التمثيل المبياني وتغيرات الدوال التالية: $x \to ax^2$ ، $x \to \frac{a}{x}$ ، $x \to ax^2+bx+c$ ، $x \to \frac{ax+b}{cx+d}$ ، $x \to \sin(x)$ ، $x \to \cos(x)$	- التعرف على المتغير ومجموعة تعريفه بالنسبة لدالة معرفة بجدول معطيات أو بمنحنى أو بصيغة. - قراءة صورة عدد وتحديد عدد صورته معلومة من خلال التمثيل المبياني لدالة. - استنتاج تغيرات دالة أو القيم القصوى والدنيا انطلاقا من التمثيل المبياني. - استعمال التمثيل المبياني لدراسة بعض المعادلات والمتراجحات. - التمكن من رسم منحنى دالة حدودية من الدرجة الثانية أو دالة متخاطة دون اللجوء إلى تغيير المعلم. - التعبير عن وضعيات مستقاة من الواقع أو من مواد أخرى باستعمال مفهوم الدالة.	- لتقريب مفهوم الدالة والتمثيل المبياني لها يمكن الاستئناس في حدود الإمكان ببعض البرانم المعلوماتية المدمجة في الحاسوب التي تمكن من إنشاء منحنيات الدوال كما يمكن الانطلاق من وضعيات مختارة من الهندسة والفيزياء والاقتصاد والحياة العامة. - ينبغي تدريب التلاميذ على ترييض الوضعيات وحل مسائل متنوعة أثناء تناول القيم الدنيا والقيم القصوى لدالة. - تعتبر جميع الدوال الواردة في هذا الفصل إلى جانب دالة الجيب وجيب التمام دوالا مرجعية. - يمكن استعمال الآلة الحاسبة العلمية في تحديد الصور أو الآلة الحاسبة القابلة للبرمجة لإنشاء المنحنيات إن كان ذلك ممكنا (أو الإشارة إلى ذلك). - يمكن اقتراح مسائل تؤدي إلى معادلات يصعب حلها جبريا وتحديد حلول مقربة لها ، مبيانيا.

I. عموميات حول الدوال العددية:

1. دالة عددية لمتغير حقيقي:

تعريف: ليكن D جزء من $\mathbb{R}$. نسمي f دالة عددية معرفة على D (أو f دالة من D نحو $\mathbb{R}$)، كل علاقة تربط كل عنصر x من D بعنصر وحيد من $\mathbb{R}$ ، يرمز له بالرمز $f(x)$.

اصطلاحات: لتكن f دالة عددية معرفة على D نكتب: $f: D \to \mathbb{R}$
$x \to f(x)$

- المجموعة D تسمى مجموعة تعريف الدالة f .
- ليكن x عنصرا من D ، بحيث: $y = f(x)$
  ← y يسمى صورة x بالدالة f .
  ← العنصر x يسمى سابق العنصر y .
- الدالة f تسمى كذلك دالة عددية لمتغير حقيقي.

مثال 1: f = عدد ساعات الدراسة

$A = \{$ الأحد ؛ الاثنين؛..... $\}$ $\quad B = \{3;4;5;6;7;8\}$

$f($الأحد$)$ غير معرفة

مثال2 : ليكن f الدالة العددية المعرفة كالتالي : $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to f(x) = 3x^2 - 1$

1. أحسب : $f(1)$ و $f(-1)$ و $f(\sqrt{2})$
2. حدد سوابق العدد 2

الجواب: 1) $f(1) = 3\times1^2 - 1 = 3-1 = 2$ و $f(-1) = 3\times(-1)^2 - 1 = 3-1 = 2$

$f(\sqrt{2}) = 3\times(\sqrt{2})^2 - 1 = 6-1 = 4$

2) $f(x) = 3\times x^2 - 1 = 2$ يعني $3\times x^2 - 1 = 2$ يعني $3\times x^2 = 3$

يعني $x^2 = 1$ يعني $x = 1$ أو $x = -1$ ومنه للعدد سابقين هما $x = 1$ أو $x = -1$

2. مجموعة تعريف دالة عددية:

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x. مجموعة تعريف الدالة f هي المجموعة المكونة من جميع الأعداد الحقيقية x بحيث $f(x)$ موجود أي $f(x)$ قابلة للحساب. و يرمز لها غالبا بالرمز D_f بمعنى: $x \in D_f$ تكافئ $f(x) \in \mathbb{R}$.

ملحوظة: نقول إن f دالة عددية معرفة على A إذا كان A جزء من D_f .

أنشطة : حدد مجموعة تعريف الدوال التالية:

1) $f(x) = 3x^2 - x + 1$ $\quad$ 2) $g(x) = \frac{x^3}{2x-4}$

3) $h(x) = \frac{5x+10}{x^2-9}$ $\quad$ 4) $m(x) = \sqrt{2x-4}$

الجواب: 1) $f(x) = 3x^2 - x + 1$ يعني $D_f = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2) $g(x) = \frac{x^3}{2x-4}$ يعني $D_g = \{x \in \mathbb{R} / 2x-4 \neq 0\}$

$2x-4=0$ يعني $2x=4$ يعني $x=2$ ومنه $D_g = \mathbb{R} - \{2\}$

3) $h(x) = \frac{5x+10}{x^2-9}$ يعني $D_h = \{x \in \mathbb{R} / x^2-9 \neq 0\}$

$x^2-9=0$ يعني $x^2-3^2=0$ يعني $(x-3)(x+3)=0$

يعني $x+3=0$ أو $x-3=0$ يعني $x=-3$ أو $x=3$

ومنه $D_h = \mathbb{R} - \{-3;3\}$

4) $m(x) = \sqrt{2x-4}$ يعني $D_m = \{x \in \mathbb{R} / 2x-4 \geq 0\}$

$2x-4 \geq 0$ يعني $2x \geq 4$ يعني $x \geq \frac{4}{2}$ يعني $x \geq 2$ ومنه $D_m = [2;+\infty[$

تمرين 1: حدد مجموعة تعريف الدالة f في الحالات التالية:

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 5x + 10$ $\quad$ 2) $f(x) = \frac{x^2+x-1}{4x-12}$

3) $f(x) = \frac{x+10}{4x^2-1}$ $\quad$ 4) $f(x) = \frac{7x-1}{x^3-2x}$

5) $f(x) = \frac{x-5}{2x^2-5x-3}$ $\quad$ 6) $f(x) = \sqrt{-3x+6}$

7) $f(x) = \sqrt{x^2-3x+2}$ $\quad$ 8) $f(x) = \sqrt{\frac{-3x+2}{x-1}}$

الجواب: 1) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 5x + 10$

يعني $D_f = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2) $f(x) = \frac{x^2+x-1}{4x-12}$ يعني $D_f = \{x \in \mathbb{R} / 4x-12 \neq 0\}$

$4x-12=0$ يعني $4x=12$ يعني $x=3$ ومنه $D_f=\mathbb{R}-\{3\}$

(3 $f(x)=\frac{x+10}{4x^2-1}$ يعني $D_f=\{x\in\mathbb{R}/4x^2-1\neq0\}$

$4x^2-1=0$ يعني $(2x)^2-1^2=0$ يعني $(2x-1)(2x+1)=0$

يعني $2x-1=0$ أو $2x+1=0$ يعني $x=\frac{1}{2}$ أو $x=-\frac{1}{2}$ ومنه $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$

(4 $f(x)=\frac{7x-1}{x^3-2x}$ يعني $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^3-2x\neq0\}$

$x^3-2x=0$ يعني $x(x^2-2)=0$ يعني $x^2-2=0$ أو $x=0$

يعني $x^2=2$ أو $x=0$ يعني $x=\sqrt{2}$ أو $x=-\sqrt{2}$ أو $x=0$

ومنه $D_f=\mathbb{R}-\{-\sqrt{2};0;\sqrt{2}\}$

(5 $f(x)=\frac{x-5}{2x^2-5x-3}$ يعني $D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x^2-5x-3\neq0\}$

$2x^2-5x-3=0$ نحل المعادلة باستعمال المميز

$a=2$ و $b=-5$ و $c=-3$

$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times2\times(-3)=25+24=49=(7)^2\succ0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{-(-5)+\sqrt{49}}{2\times2}=\frac{7+5}{4}=\frac{12}{4}=3$ و $x_2=\frac{(-5)-\sqrt{49}}{2\times2}=\frac{5-7}{4}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$

ومنه: $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2};3\right\}$

(6 $f(x)=\sqrt{-3x+6}$ يعني $D_f=\{x\in\mathbb{R}/-3x+6\geq0\}$

$-3x+6\geq0$ يعني $-3x\geq-6$ يعني $x\leq\frac{-6}{-3}$ يعني $x\leq2$ ومنه $D_m=]-\infty;2]$

(7 $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$ $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2-3x+2\geq0\}$

$a=1$ $\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times2\times1=9-8=1>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان للحدودية جذرين هما:

x	$-\infty$		$1/2$		1		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$x_1=\frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times2}=\frac{3+1}{4}=1$ و $x_1=\frac{3-1}{4}=\frac{1}{2}$

ومنه: $D_f=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty[$

(8 $f(x)=\sqrt{\frac{-3x+2}{x+1}}$ $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\frac{-3x+2}{x+1}\geq0 \text{ و } x+1\neq0\right\}$

$-3x+2=0$ يعني $x=\frac{2}{3}$ يعني $x=3$ يعني $x+1=0$ يعني $x=-1$

نحدد أولا جدول الاشارة:

x	$-\infty$		-1		$1/3$		$+\infty$
$-3x+2$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$x+1$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$-3x+2/x+1$		$-$	||	$+$	0	$-$	

$D_f=\left]-1,\frac{2}{3}\right]$

3. تساوي دالتين عدديتين:

تعريف: لتكن f و g دالتين عدديتين لهما نفس مجموعة تعريف D .

تكون الدالتان f و g متساويتان إذا وفقط إذا كان $f(x)=g(x)$ لكل x من D. و نكتب: $f=g$

مثال: لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين بما يلي $f(x)=\sqrt{x^2}$ و $g(x)=|x|$

لدينا: $D_f=\mathbb{R}$, لأن $x^2\geq0$ لكل x من $\mathbb{R}$, و $D_g=\mathbb{R}$ و منه فان $D_f=D_g$.

و بما أن $\sqrt{x^2}=|x|$ لكل x من $\mathbb{R}$ فان $f(x)=g(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$

إذن $f=g$.

4. التمثيل المبياني لدالة عددية:

المستوى المنسوب إلى معلم $(o;\vec{i};\vec{j})$ غالبا يكون متعامدا ممنظما.

تعريف: لتكن f دالة عددية معرفة على جزء D من $\mathbb{R}$.

التمثيل المبياني C_f للدالة f (أو منحنى الدالة f) هو مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوى بحيث: $y=f(x)$ و $x\in D$

مثال1: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي: $f(x)=\frac{2x}{x+2}$ و ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f و ليكن A و B نقط أفاصليها هي 1- و 2 على التوالي

1) حدد أراتيب A و B علما أنهما ينتميان إلى (C_f).

2) لتكن $E\left(\frac{1}{2};\frac{2}{5}\right)$, $F(-3;5)$, $G(1;0)$ نقط من المستوى. هل النقط E , F و G تنتمي للمنحنى (C_f)؟

الجواب:(1 $A\in(C_f)$ يعني $A(-1;f(-1))$

$f(-1)=\frac{2\times(-1)}{-1+2}=-2$ ومنه: $A(-1;-2)$

$B\in(C_f)$ يعني $B(2;f(2))$ $f(2)=\frac{2\times(2)}{2+2}=1$ ومنه: $B(2;1)$

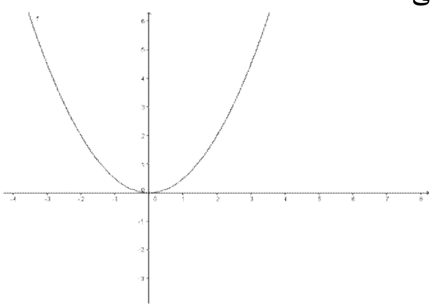
(2 $E\left(\frac{1}{2};\frac{2}{5}\right)$? لدينا $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2\times\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)+2}=\frac{1}{\frac{5}{2}}=\frac{2}{5}$ ومنه: $E\left(\frac{1}{2};\frac{2}{5}\right)\in(C_f)$

$F(-3;5)$ لدينا $f(-3)=\frac{2\times(-3)}{(-3)+2}=6\neq5$ ومنه: $F(-3;5)\notin(C_f)$

$G(1;0)$? لدينا $f(1)=\frac{2\times(1)}{(1)+2}=\frac{2}{3}\neq1$ ومنه: $G(1;0)\notin(C_f)$

مثال2: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي: $f(x)=x^2$

أرسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المعلم $(o;\vec{i};\vec{j})$ ماذا تلاحظ بالنسبة لمنحنى الدالة؟



نلاحظ من خلال الحساب أن : التمثيل المبياني متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب و أن عددين متقابلين لهما نفس الصورة

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9

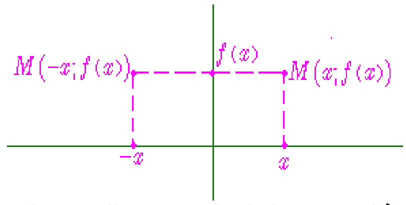
5. الدالة الزوجية- الدالة الفردية:

أ)الدالة الزوجية:

تعريف: لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x و D_f مجموعة تعريفها.

نقول إن f دالة زوجية إذا تحقق الشرطان التاليان:

- ❖ لكل x من D_f لدينا: $-x$ تنتمي إلى D_f.
- ❖ لكل x من D_f لدينا: $f(-x)=f(x)$



مثال: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي:

$f(x)=\frac{1}{2}x^2$

1. حدد مجموعة تعريف الدالة f
2. بين أن f دالة زوجية
3. أرسم التمثيل المبياني للدالة f
4. اعط تأويلا مبيانيا

أجوبة: 1) $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

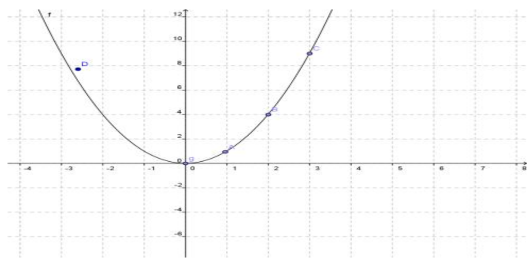
2) أ) لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $-x$ تنتمي إلى $\mathbb{R}$.

ب) $f(-x)=\frac{1}{2}(-x)^2=\frac{1}{2}x^2=f(x)$

ومنه f دالة زوجية

3)

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$



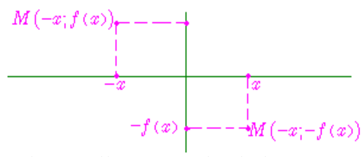
4) محور الأراتيب محور تماثل المنحنى C_f.

ب) **الدالة الفردية:** لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x و C_f منحناها في معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$.

تعريف: لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x و D_f مجموعة تعريفها

نقول أن f دالة فردية إذا تحقق الشرطان التاليان:

- ❖ لكل x من D_f لدينا: $-x$ تنتمي إلى D_f.
- ❖ لكل x من D_f لدينا: $f(-x)=-f(x)$



مثال: نعتبر الدالة العددية f للمتغيرالحقيقي x المعرفة كالتالي:

$f(x)=\frac{2}{x}$

1. حدد مجموعة تعريف الدالة f
2. بين أن f دالة فردية
3. أرسم التمثيل المبياني للدالة f
4. اعط تأويلا مبيانيا

أجوبة: 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\neq 0\}$

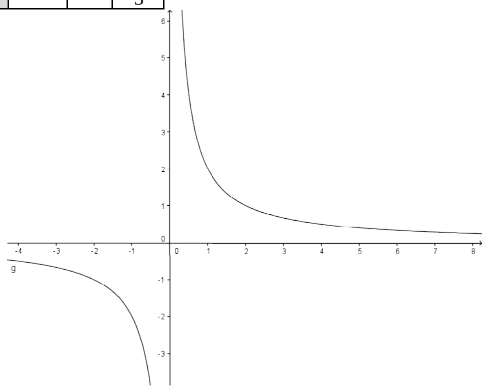
ومنه: $D_f=\mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}^*$

2) أ) لكل x من $\mathbb{R}^*$ لدينا: $-x$ تنتمي إلى $\mathbb{R}^*$.

ب) $f(-x)=\frac{2}{(-x)}=-\frac{2}{x}=-f(x)$

ومنه f دالة فردية 3)

x	0	1	2	3
$f(x)$		2	1	$\frac{2}{3}$



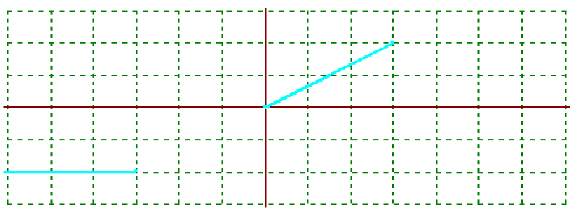
4) نقطة 0 مركز تماثل المنحنى C_f.

ت) التأويل المبياني

لتكن f دالة عددية لمتغير x حقيقي و C_f منحناها في معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$.

- ❖ تكون f دالة زوجية إذا و فقط إذا كان محور الأراتيب محور تماثل المنحنى C_f.
- ❖ تكون f دالة فردية إذا و فقط إذا كانت النقطة 0 مركز تماثل المنحنى C_f.

مثال : **أتمم إنشاء منحنى الدالة الزوجة f المعرفة على $\mathbb{R}$**



II.تغيرات دالة عددية:

مثال 1: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي:

$f(x)=2x+1$

املأ الجدول التالي : ماذا تلاحظ؟

-100	-10	-7	-3	0	2	5	10	100

نلاحظ : أنه عندما تكبر x فان $f(x)$ تكبر أيضا نقول أن الدالة f تزايدية

مثال 2: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي:

$f(x)=-3x+2$

املأ الجدول التالي : ماذا تلاحظ؟

-100	-10	-7	-3	0	2	5	10	100

نلاحظ : أنه عندما تكبر x فان $f(x)$ تصغر نقول أن الدالة f تناقصية

1. **تعريف:** لتكن f دالة عددية معرفة على المجال I .

❖ نقول إن الدالة f تزايدية (تناقصية) على المجال I , إذا و فقط إذا كان لكل

إذا كان $x_1 \prec x_2$ فان $f(x_1) \prec f(x_2)$ $\left(f(x_1) \succ f(x_2)\right)$

مثال1: $f(x)=4x-3$

أجوبة: 1) $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2) ليكن: $x_1 \in \mathbb{R}$ و $x_2 \in \mathbb{R}$ بحيث $x_1 < x_2$

اذن : $4x_1 < 4x_2$ اذن : $4x_1-3 < 4x_2-3$ اذن : $f(x_1) < f(x_2)$

ومنه الدالة f تزايدية على $\mathbb{R}$

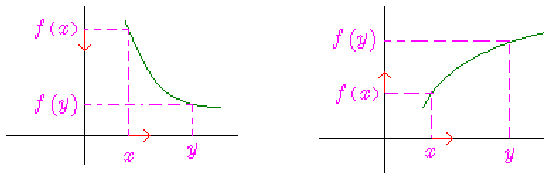
مثال2: $f(x)=-3x+2$

أجوبة: 1) $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2) ليكن: $x_1 \in \mathbb{R}$ و $x_2 \in \mathbb{R}$ بحيث $x_1 < x_2$

اذن : $-3x_1 > -3x_2$ اذن : $4x_1+2 > 4x_2+2$ اذن : $f(x_1) > f(x_2)$

ومنه الدالة f تناقصية على $\mathbb{R}$



f تزايدية f تناقصية

❖ نقول إن الدالة f ثابتة على المجال I , إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 من I لدينا: $f(x_1)=f(x_2)$

مثال :اعط مثال لدالة ثابتة

2. **جدول تغيرات دالة:** لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x و D_f مجموعة تعريفها.دراسة منحى تغيرات الدالة f , يعني تجزيء المجموعة D_f إلى أكبر مجالات ممكنة تكون فيها الدالة f تزايدية أو تناقصية قطعا أو ثابتة.و نلخص نتائج هده الدراسة في جدول, يسمى جدول تغيرات الدالة ثابتة.

3. **رتابة دالة على مجال:**

تعريف: لتكن دالة عددية معرفة على مجال I .
نقول إن f رتيبة قطعا على المجال I إذا كانت تزايدية قطعا على I أو تناقصية قطعا على I .

تمرين 2: لتكن f دالة معرفة ب: $f(x)=\frac{2}{x+1}$.

1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .

2) أدرس رتابة الدالة f على كل من المجالين $]-1;+\infty[$ و $]-\infty;-1[$.

3) حدد جدول تغيرات الدالة f .

أجوبة: 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R} / x+1\neq 0\}$

$x+1=0$ يعني $x=-1$ ومنه : $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$

2) أ) دراسة رتابة الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$:

ليكن : $x_1 \in]-1;+\infty[$ و $x_2 \in]-1;+\infty[$ بحيث $x_1 < x_2$

اذن $x_1+1 < x_2+1$ ومنه $\frac{1}{x_1+1} > \frac{1}{x_2+1}$ ومنه $\frac{2}{x_1+1} > \frac{2}{x_2+1}$

أي $f(x_1) > f(x_2)$

ومنه الدالة f تناقصية على $]-1;+\infty[$

ب) دراسة رتابة الدالة f على المجال $]-\infty;-1[$

ليكن : $x_1 \in]-\infty;-1[$ و $x_2 \in]-\infty;-1[$ بحيث $x_1 < x_2$

اذن $x_1+1 < x_2+1$ ومنه $\frac{1}{x_1+1} > \frac{1}{x_2+1}$ ومنه $\frac{2}{x_1+1} > \frac{2}{x_2+1}$

أي $f(x_1) > f(x_2)$ ومنه الدالة f تناقصية على $]-\infty;-1[$

3)جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	↘	‖	↘

III. دراسة الدوال:

1. الدالة : $x \mapsto ax^2$ $(a\neq 0)$

ملخص **الحالة:** $a \succ 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↘	0	↗	

الحالة: $a \prec 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↗	0	↘	

ملاحظات: المنحنى الممثل للدالة $x \mapsto ax^2$ $(a\neq 0)$ يسمى شلجما.
النقطة أصل المعلم تسمى رأس الشلجم. محور الأراتيب هو محور تماثل للمنحنى.

مثال : لتكن f دالة معرفة ب: $f(x)=\frac{3}{2}x^2$

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .
2. أدرس زوجية الدالة f
3. أدرس رتابة الدالة f على كل من المجالين $[0;+\infty[$ و $]-\infty;0]$
4. حدد جدول تغيرات الدالة f .
5. هل الدالة f تقبل قيمة دنيا أو قيمة قصوى؟
6. أرسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم م م $(o;\vec{i};\vec{j})$.

أجوبة : 1) $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2) أ) لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $-x$ تنتمي إلى $\mathbb{R}$.

ب) $f(-x)=\frac{3}{2}(-x)^2=\frac{3}{2}x^2=f(x)$

ومنه f دالة زوجية

3) أ) دراسة رتابة الدالة f على المجال $[0;+\infty[$:

ليكن : $x_1 \in [0;+\infty[$ و $x_2 \in [0;+\infty[$ بحيث $x_1 < x_2$

اذن: $x_1^2 < x_2^2$ ومنه $\frac{3}{2}x_1^2 < \frac{3}{2}x_2^2$ أي $f(x_1) < f(x_2)$

ومنه الدالة f تزايدية على $[0;+\infty[$

ب) دراسة رتابة الدالة f على المجال $]-\infty;0]$:

ليكن : $x_1 \in]-\infty;0]$ و $x_2 \in]-\infty;0]$ بحيث $x_1 < x_2$

اذن: $x_1^2 > x_2^2$ ومنه $\frac{3}{2}x_1^2 > \frac{3}{2}x_2^2$ أي $f(x_1) > f(x_2)$

ومنه الدالة f تناقصية على $]-\infty;0]$

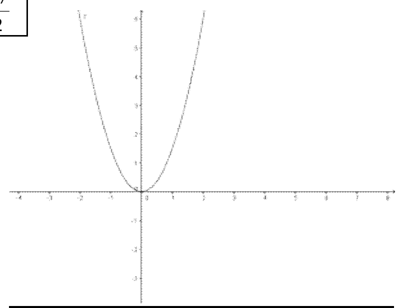
4)حدد جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

5) الدالة f تقبل قيمة دنيا عند : $x=0$

6) رسم التمثيل المبياني للدالة f

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	$\frac{3}{2}$	6	$\frac{27}{2}$



تمرين 3: لتكن f دالة معرفة ب: $f(x) = -\frac{1}{4}x^2$.

1)حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .

2)أدرس زوجية الدالة f

3)أدرس رتابة الدالة f على كل من المجالين $[0;+\infty[$ و $]-\infty;0]$

وحدد جدول تغيرات الدالة f .

4)هل الدالة f تقبل قيمة دنيا أو قيمة قصوى؟

5)أرسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

أجوبة: 1) $D_f = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2) أ) لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $-x$ تنتمي إلى $\mathbb{R}$.

ب) $f(-x) = -\frac{1}{4}(-x)^2 = -\frac{1}{4}x^2 = f(x)$ ومنه f دالة زوجية

3)أ)دراسة رتابة الدالة f على المجال $[0;+\infty[$.

ليكن : $x_1 \in [0;+\infty[$ و $x_2 \in [0;+\infty[$ بحيث $x_1 < x_2$

اذن: $x_1^2 < x_2^2$ ومنه $-\frac{1}{4}x_1^2 > -\frac{1}{4}x_2^2$ أي $f(x_1) > f(x_2)$

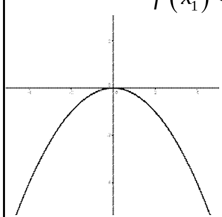
ومنه الدالة f تناقصية على $[0;+\infty[$

ب) دراسة رتابة الدالة f على المجال $]-\infty;0]$.

ليكن : $x_1 \in]-\infty;0]$ و $x_2 \in]-\infty;0]$ بحيث $x_1 < x_2$

اذن: $x_1^2 > x_2^2$ ومنه $-\frac{1}{4}x_1^2 < -\frac{1}{4}x_2^2$ أي $f(x_1) < f(x_2)$

ومنه الدالة f تزايدية على $]-\infty;0]$



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$

4)الدالة f تقبل قيمة قصوى عند $x=0$

5) التمثيل المبياني للدالة f هو شلجم رأسه النقطةO

تمرين 4: حدد جدول تغيرات الدالة في الحالات التالية :

1) $f(x) = -3x^2$ (2 $f(x) = 5x^2$ (3 $f(x) = \frac{7}{2}x^2$

أجوبة: 1) $f(x) = -3x^2$ $a = -3 < 0$ اذن :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$

2) $f(x) = 5x^2$ $a = 5 > 0$ اذن :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

3) $f(x) = \frac{7}{2}x^2$ $a = \frac{7}{2} > 0$ اذن :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

2. الدالة: $f(x) = \frac{a}{x}$ $(a \neq 0)$

مثال : لتكن f دالة معرفة ب: $f(x) = \frac{-2}{x}$

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .
2. أدرس زوجية الدالة f
3. أدرس رتابة الدالة f على كل من المجالين $]0;+\infty[$ و $]-\infty;0[$
4. حدد جدول تغيرات الدالة f .
5. هل الدالة f تقبل قيمة دنيا أو قيمة قصوى؟
6. أرسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم

أجوبة: 1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\}$

ومنه : $D_f = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$

2) أ) لكل x من $\mathbb{R}^*$ لدينا: $-x$ تنتمي إلى $\mathbb{R}^*$.

ب) $f(-x) = \frac{-2}{(-x)} = -\frac{-2}{x} = -f(x)$ ومنه f دالة فردية

3) أ) دراسة رتابة الدالة f على المجال $]0;+\infty[$:

ليكن : $x_1 \in]0;+\infty[$ و $x_2 \in]0;+\infty[$ بحيث $x_1 < x_2$

اذن: $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$ ومنه $\frac{-2}{x_1} < \frac{-2}{x_2}$ أي $f(x_1) < f(x_2)$

ومنه الدالة f تزايدية على $]0;+\infty[$

ب) دراسة رتابة الدالة f على المجال $]-\infty;0[$

ليكن : $x_1 \in]-\infty;0[$ و $x_2 \in]-\infty;0[$ بحيث $x_1 < x_2$

اذن: $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$ ومنه $\frac{-2}{x_1} < \frac{-2}{x_2}$ أي $f(x_1) < f(x_2)$

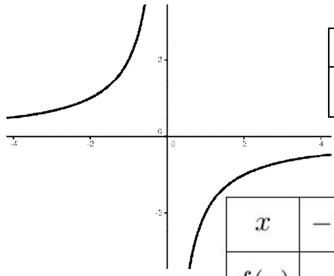
ومنه الدالة f تزايدية على $]-\infty;0[$

(4

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$

5)الدالة f تقبل لاتقبل لا قيمة قصوى و لا قيمة دنيا

6) التمثيل المبياني للدالة f هو هذلول مركزه النقطةO



x	0	1	2	4
$f(x)$		-2	-1	1 /2-

3) **ملخص :الحالة:** $a \succ 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	‖	↘

الحالة: $a \prec 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↗	‖	↗

التمثيل المبياني للدالة f: بما أن f دالة فردية فانه يكفي أن نمثل f على $]0,+\infty[$ ثم نتمم منحنى الدالة f على باستعمال التماثل المركزي الذي مركزه O أصل المعلم.

تعريف: منحنى الدالة $x \mapsto \frac{a}{x}$ $(a \neq 0)$ يسمى هذلولا مركزه O أصل المعلم و مستقيماه المقاربان هما $x=0$ و $y=0$.

تمرين 5: حدد جدول تغيرات الدالة في الحالات التالية :

1) $f(x)=\frac{-4}{x}$ (2 $f(x)=\frac{3}{x}$

أجوبة: 1) $f(x)=\frac{-4}{x}$ $a=-4<0$ اذن :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↗	‖	↗

2) $f(x)=\frac{3}{x}$ $a=3>0$ اذن :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	‖	↘

IV. التمثيل المبياني و تغيرات الدالة: $x \mapsto ax^2+bx+c$

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$.

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=ax^2+bx+c$

حيث a و b و c أعداد حقيقية مع $a \neq 0$.

❖ يوجد عددان حقيقيان α و β بحيث: $f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta$ (الشكل القانوني)

❖ منحنى الدالة f يسمى شلجما رأسه $S(-\alpha;\beta)$ و محوره $(D): x=-\alpha$

نقبل النتائج التالية: جدول تغيرات f :

الحالة: $a \succ 0$

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
f	↘	β	↗

الحالة: $a \prec 0$

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
f	↗	β	↘

(6

مثال: لتكن f دالة معرفة ب: $f(x)=-2x^2+4x-1$.

1) حدد D_f

2) بين أن: $f(x)=-2(x-1)^2+1$

3) (يسمى الشكل القانوني $f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta$)

4) حدد جدول تغيرات الدالة f .

5) حدد نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاصيل. و مع محور الأراتيب.

6) أرسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f

أجوبة: 1) $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2) $f(x)=-2x^2+4x-1=-2(x^2-2x)-1=-2(x^2-2\times x\times 1+1^2-1^2)-1$

$f(x)=-2((x-1)^2-1)-1=-2(x-1)^2+2-1=-2(x-1)^2+1$

بالمقارنة مع كتابة الشكل القانوني: $f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta$

نجد : $\alpha=-1;\beta=1;a=-2$

4) حدد جدول تغيرات الدالة f . لدينا : $a \prec 0$ اذن :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	↗		↘

5) أ) نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاصيل

نحل فقط المعادلة : $f(x)=0$ يعني $-2(x-1)^2+1=0$

يعني $-2(x-1)^2=-1$ يعني $(x-1)^2=\frac{1}{2}$

يعني $x-1=\sqrt{\frac{1}{2}}$ أو $x-1=-\sqrt{\frac{1}{2}}$

يعني $x=\frac{\sqrt{2}}{2}+1=\frac{\sqrt{2}+2}{2}$ أو $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}+1=\frac{-\sqrt{2}+2}{2}$

ومنه نقط التقاطع هما: $A\left(\frac{\sqrt{2}+2}{2};0\right)$ أو $B\left(\frac{-\sqrt{2}+2}{2};0\right)$

ملاحظة: يمكن حل المعادلة باستعمال المميز

ب) نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأراتيب

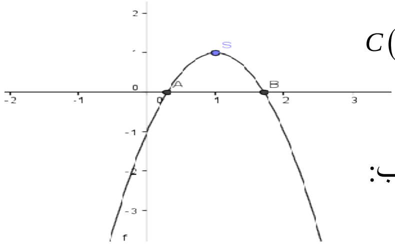
نحسب فقط : $f(0)$

$f(0)=-2\times 0^2+4\times 0-1=-1$

ومنه نقطة التقاطع هي: $C(0;-1)$

-2	-1	0	1	2	3	4
-17	-7	-1	1	-1	-7	-17

6) رسم: C_f



تمرين 6: لتكن f دالة معرفة ب:

$f(x)=x^2+4x+3$.

1) بين أن: $f(x)=(x+2)^2-1$ (يسمى الشكل القانوني $f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta$)

2) حدد جدول تغيرات الدالة f .

3) حدد نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محوري المعلم

4) أرسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f و المستقيم (D) الذي معادلته $(D): y=3$ في معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$.

5) حدد نقط تقاطع (C_f) و (D)

6) حل مبيانيا في $\mathbb{R}$ المتراجحة $x^2+4x \geq 0$.

أجوبة : $f(x)=x^2+4x+3$ (1

$D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

$f(x)=x^2+4x+3=x^2+2\times x\times 2+2^2-2^2+3$

$f(x)=(x+2)^2-4+3=(x+2)^2-1$

بالمقارنة مع كتابة الشكل القانوني:

$f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta$

نجد : $\alpha=2;\beta=-1;a=1$

2) حدد جدول تغيرات الدالة f . لدينا : $a=1>0$ اذن :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	↘	-1	↗

3)أ)نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاصيل

نحل فقط المعادلة : $f(x)=0$ يعني $(x+2)^2-1=0$

يعني $(x+2)^2=1$ يعني يعني $x+2=1$ أو $x+2=-1$

يعني $x=-1$ أو $x=-3$

ومنه نقط التقاطع هما: $B(-1;0)$ و $A(-3;0)$

ملاحظة: يمكن حل المعادلة باستعمال المميز

ب)نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأراتيب

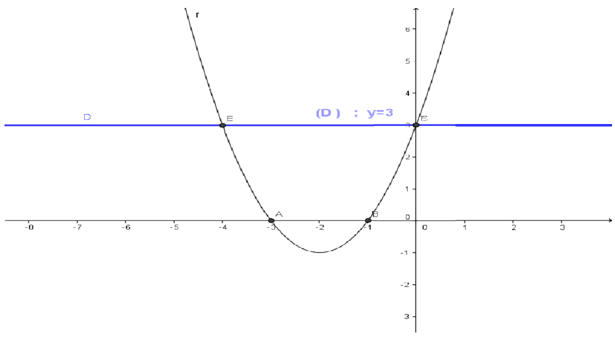
نحسب فقط : $f(0)$

$f(0)=3$

ومنه نقطة التقاطع هي: $C(0;3)$

4)رسم: C_f

-5	-4	-3	-2	-1	0	1
8	3	0	-1	0	3	8



5)حدد نقط تقاطع (C_f) و (D)

نحل للمعادلة $f(x)=3$ يعني $f(x)=y$

$f(x)=3$ يعني $(x+2)^2-1=3$

يعني $(x+2)^2=4$ يعني $x+2=2$ أو $x+2=-2$

يعني $x=0$ أو $x=-4$ ومنه نقط التقاطع هما: $C(0;3)$ و $E(-4;3)$

ملاحظة: يمكن حل المعادلة باستعمال المميز

6)الحل المبياني للمتراجحة: $x^2+4x\ge 0$

$x^2+4x\ge 0$ تعنى $x^2+4x+3\ge 3$: تعنى $f(x)\ge 3$

مبيانيا نبحث عن المجال بحيث منحنى الدالة f يوجد فوق المستقيم (D) أي $S=]-\infty,-4]\cup[0,+\infty[$

V. التمثيل المبياني و تغيرات الدالة: $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$

المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي: $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$

حيث $c\neq 0$ و a و b و c و d أعداد حقيقية و $ad-bc\neq 0$ و $x\neq\frac{d}{c}$

نقبل النتائج التالية: يوجد ثلاث أعداد : α و β و k بحيث : $f(x)=\beta+\frac{k}{x+\alpha}$ ويسمى الشكل المختصر

❖ جدول تغيرات f :**الحالة:** $k\succ 0$

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
f	↘	‖	↘

الحالة: $k\prec 0$

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
f	↗	‖	↗

❖ منحنى f يسمى هذلولا مركزه $S(-\alpha;\beta)$ و مقارباه $(D_1):x=-\alpha$ و $(D_2):y=\beta$.

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$

1) حدد D_f

2) أكتب $f(x)$ على الشكل المختصر وحدد مقاربات منحنى الدالة f

3)حدد جدول تغيرات الدالة f

4)حدد نقط تقاطع منحنى الدالة f مع محوري المعلم

5) أرسم (C) التمثيل المبياني للدالة

6) أرسم المستقيم الذي معادلته : الذي معادلته : $y=5$

7) حل مبيانيا ثم جبريا المعادلة $f(x)=5$

8) حل مبيانيا المتراجحة: $f(x)\ge 5$

أجوبة : $f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x-1\neq 0\}$ (1

ومنه $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

2)**انجاز القسمة الاقليدية:**

$$\begin{array}{r|l} 2x+1 & x-1 \\ \cline{2-2} -2x+2 & 2 \\ \hline 3 & \end{array}$$

$$f(x)=\frac{2x+1}{x-1}=\frac{2(x-1)+3}{x-1}=\frac{2(x-1)}{x-1}+\frac{3}{x-1}=2+\frac{3}{x-1}$$

بالمقارنة مع كتابة الشكل القانوني: $f(x)=\beta+\frac{k}{x+\alpha}$

نجد : $\alpha=-1;\beta=2;k=3$

3) حدد جدول تغيرات الدالة f . لدينا : $k=3>0$ اذن :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	↘	‖	↘

منحنى f هو هذلولا مركزه $A(1;2)$ و مقارباه $x=1$ و $y=2$

4)أ)نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاصيل

نحل فقط المعادلة : $f(x)=0$ يعني $\frac{2x+1}{x-1}=0$ يعني $2x+1=0$

يعني $2x=-1$ يعني $x=\frac{-1}{2}$ ومنه نقطة التقاطع هي: $A\left(-\frac{1}{2};0\right)$

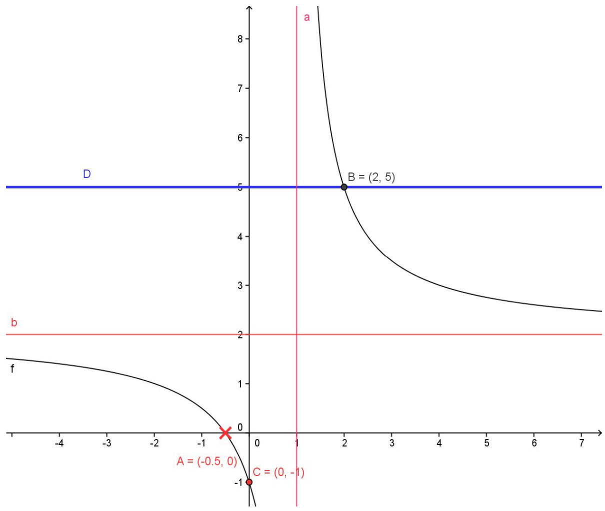
ب)نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأراتيب

نحسب فقط : $f(0)$ $\quad f(0)=-1$

ومنه نقطة التقاطع هي: $C(0;-1)$

5)و6)ورسم: C_f

-2	-1	0	1	2	3	4
1	$\frac{1}{2}$	-1		5	$\frac{7}{2}$	3



7)ا)الحل المبياني للمعادلة $f(x)=5$: هوأفاصيل نقط تقاطع C_f و المستقيم (D) أي أفصول النقطة $B(2;0)$

ومنه مجموعة الحلول : $S=\{2\}$

ب)الحل الجبري للمعادلة $f(x)=5$:

$f(x)=5$ يعني $\frac{2x+1}{x-1}=5$ يعني $2x+1=5(x-1)$

يعني $2x+1=5x-5$ يعني $-3x=-6$ يعني $x=2$

ومنه مجموعة الحلول : $S=\{2\}$

8)الحل المبياني للمتراجحة: $f(x)\geq 5$

مبيانيا نبحث عن المجال بحيث منحنى الدالة f يوجد فوق المستقيم (D) أي $S=]1,2]$

تمرين 7: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=\frac{3x-1}{2x-2}$

1) حدد D_f

2) أكتب $f(x)$ على الشكل المختصر وحدد مقاربات منحنى الدالة f

3)حدد جدول تغيرات الدالة f

4)حدد نقط تقاطع منحنى الدالة f مع محوري المعلم

5) أرسم (C) التمثيل المبياني للدالة

6) أرسم المستقيم الذي معادلته : المستقيم (D) الذي معادلته : $y=2$

7) حدد نقط تقاطع منحنى الدالة f و المستقيم (D)

8) حل مبيانيا المتراجحة: $f(x)\geq 2$

أجوبة : $f(x)=\frac{3x-1}{2x-2}$

1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x-2\neq 0\}$ ومنه $-2x+2$

2)**انجاز القسمة الاقليدية:**

$$\begin{array}{r|l} 3x-1 & 2x-2 \\ \hline -3x+3 & \frac{3}{2} \\ \hline 2 & \end{array}$$

$$f(x)=\frac{3x-1}{2x-2}=\frac{\frac{3}{2}(2x-2)+2}{2x-2}=\frac{3}{2}+\frac{1}{x-1}$$

بالمقارنة مع كتابة الشكل القانوني: $f(x)=\beta+\frac{k}{x+\alpha}$

نجد : $\alpha=-1;\beta=\frac{3}{2};k=1$

3) حدد جدول تغيرات الدالة f . لدينا : $k=1>0$ اذن :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	↘	‖	↘

منحنى f هو هذلولا مركزه $S\left(1;\frac{3}{2}\right)$ و مقارباه $x=1$ و $y=\frac{3}{2}$

4)أ)نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاصيل

نحل فقط المعادلة : $f(x)=0$ يعني $\frac{3x-1}{2x-2}=0$ يعني $3x-1=0$

يعني $3x=1$ يعني $x=\frac{1}{3}$

ومنه نقطة التقاطع هي: $A\left(\frac{1}{3};0\right)$

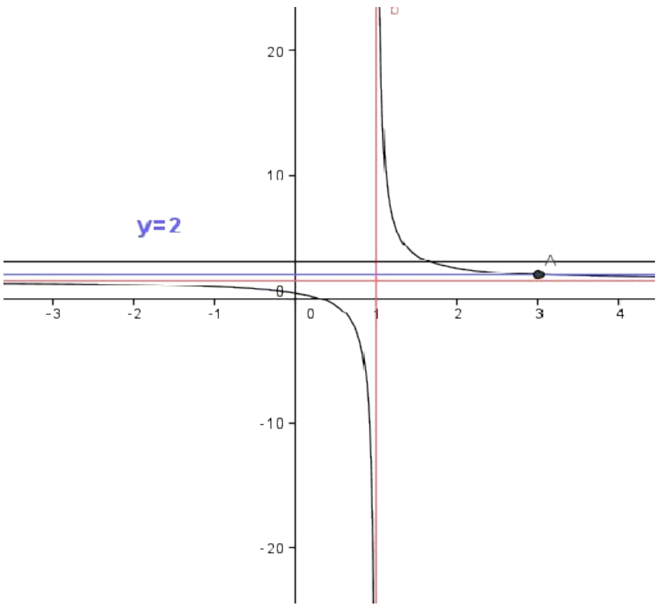
ب)نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأراتيب

نحسب فقط : $f(0)$ $\quad f(0)=\frac{1}{2}$

ومنه نقطة التقاطع هي: $B\left(0;\frac{1}{2}\right)$

5) و 6)

-2	-1	0	1	2	3	4
$\frac{7}{6}$	1	$\frac{1}{2}$		$\frac{5}{2}$	2	$\frac{11}{6}$



7)نحل للمعادلة $f(x)=2$:

$f(x)=2$ يعني $\frac{3x-1}{2x-2}=2$ يعني $3x-1=2(2x-2)$

يعني $3x-1=4x-4$ يعني $x=3$

ومنه نقطة التقاطع هي: $C(3;2)$

8)الحل المبياني للمتراجحة: $f(x)\geq 2$

مبيانيا نبحث عن المجال بحيث منحنى الدالة f يوجد فوق المستقيم (D) أي $S=]1,3]$

VI. القيم القصوى و القيم الدنيا لدالة عددية على مجال:

نشاط1: لتكن f دالة معرفة ب: $f(x)=x^2+2x+3$.

1) أحسب $f(-1)$ و تأكد أن : $f(x)=(x+1)^2+2$

2) تأكد أن : $f(x)\geq f(-1)$ مهما تكن x من $\mathbb{R}$.

أجوبة: 1) $f(-1)=(-1)^2+2\times(-1)+3=1-2+3=2$

2) $f(x)-f(-1)=(x+1)^2+2-2=(x+1)^2\geq 0$

ومنه: $f(x)\geq f(-1)$ مهما تكن x من $\mathbb{R}$.

نقول إن $f(-1)$ هي قيمة دنيا للدالة f على $\mathbb{R}$

تعاريف: لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I و a عنصرا من I.

نقول إن $f(a)$ هي القيمة القصوى للدالة f على المجال I إذا و فقط إذا كان: $f(x)\leq f(a)$ لكل x من I.

نقول إن $f(a)$ هي القيمة الدنيا للدالة f على المجال I إذا و فقط إذا كان: $f(x)\geq f(a)$ لكل x من I.

نقول كذلك الدالة f تقبل قيمة قصوى (أو دنيا) عند النقطة a على المجال I.

إذا كان $f(a)$ قيمة قصوى أو قيمة دنيا للدالة f نقول إن $f(a)$ مطراف للدالة f .

تمرين 8: لتكن f دالة معرفة ب: $f(x)=-x^2+2x+3$.

1)حدد D_f وبين أن : $f(x)=-(x-1)^2+4$.

2)حدد جدول تغيرات الدالة f .

3)حدد نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاصيل ومع محور لأراتيب.

4)أرسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f .

5)حدد مطاريف الدالة إن وجدت.

6)ناقش مبيانيا حسب قيم البارامتر m عدد حلول المعادلة $-x^2+2x+3-m=0$:

أجوبة :

1) $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

$f(x)=-x^2+2x+3=-(x^2-2x)+4=-(x^2-2\times x\times 1+1^2-1^2)+4$

$f(x)=-(x-1)^2+4$

بالمقارنة مع كتابة الشكل القانوني:

$f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta$

نجد : $\alpha=-1;\beta=4;a=-1$

2)حدد جدول تغيرات الدالة f

لدينا : $a\prec 0$ إذن :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$

3)أ)نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاصيل

نحل فقط المعادلة : $f(x)=0$ يعني $-x^2+2x+3=0$

نحل المعادلة باستعمال المميز

$a=-1$ و $b=2$ و $c=3$

$\Delta=b^2-4ac=(2)^2-4\times3\times(-1)=16=(4)^2>0$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{-(2)+\sqrt{16}}{-2}=-1$ و $x_2=\frac{-2-\sqrt{16}}{-2}=3$

ومنه نقط التقاطع هما: $A(-1;0)$ أو $B(3;0)$

ملاحظة: يمكن حل المعادلة بطريقة أخرى باستعمال الكتابة الأخرى ل $f(x)$

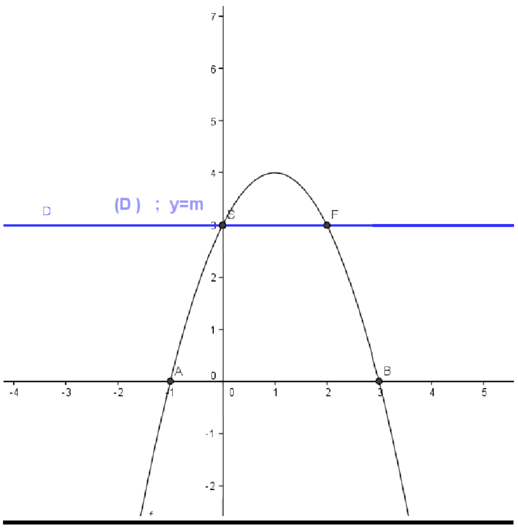
ب)نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأراتيب

نحسب فقط : $f(0)$

$f(0)=-0^2+2\times0+3=3$ ومنه نقطة التقاطع هي: $C(0;3)$

4)رسم: C_f

-2	-1	0	1	2	3	4
-5	0	3	4	3	0	-5



5) $f(x)=-(x-1)^2+4$

لدينا $-(x-1)^2\leq 0$ مهما تكن x من $\mathbb{R}$.

ومنه $4-(x-1)^2\leq 4$ أي $f(x)\leq 4$ مهما تكن x من $\mathbb{R}$

وبالتالي إن 4 هي قيمة قصوى للدالة f على $\mathbb{R}$

يمكننا ملاحظة ذلك من جدول التغيرات

6)المناقشة مبيانيا حسب قيم البارامتر m ل عدد حلول المعادلة $-x^2+2x+3-m=0$:

$-x^2+2x+3-m=0$ تكافئ $-x^2+2x+3=m$ أي $f(x)=m$

أي نحدد مبيانيا عدد نقط تقاطع منحنى الدالة f و المستقيم (D) الذي معادلته : $y=m$

اذا كانت $m>4$ التمثيل المبياني لا يقطع المستقيم (D) ومنه لا يوجد حل لهذه المعادلة أي $S=\varnothing$

اذا كانت $m=4$: التمثيل المبياني يقطع المستقيم (D) في نقطة وحيدة ومنه للمعادلة حل وحيد $S=\{x_1\}$

اذا كانت $m<4$: التمثيل المبياني يقطع المستقيم (D) في نقطتين ومنه للمعادلة حلين مختلفين $S=\{x_1,x_2\}$

تمرين 9: لتكن f دالة معرفة ب: $f(x)=\frac{1}{4}x^2$.

1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f

2) أدرس زوجية الدالة f 3) حدد جدول تغيرات الدالة f

4) هل الدالة f تقبل قيمة دنيا أو قيمة قصوى؟

5) أرسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$

6) حل مبيانيا ثم جبريا المعادلة $f(x)=1$

7) أرسم المستقيم الذي معادلته : $(D)\ :\ y=\frac{1}{2}x+2$

8) حل مبيانيا ثم جبريا المعادلة $f(x)=\frac{1}{2}x+2$

9) حل مبيانيا ثم جبريا المتراجحة: $\frac{1}{4}x^2-2\ge\frac{1}{2}x$

أجوبة: 1) $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2) أ) لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $-x$ تنتمي إلى $\mathbb{R}$.

ب) $f(-x)=\frac{1}{4}(-x)^2=\frac{1}{4}x^2=f(x)$

ومنه f دالة زوجية

3) حدد جدول تغيرات الدالة f .

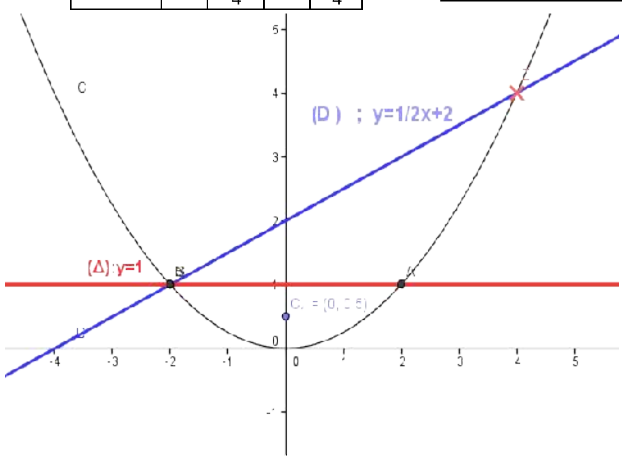
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

4) الدالة f تقبل قيمة دنيا عند : $x=0$

5) رسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f

x	0	1
y	2	$\frac{5}{2}$

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$



6) أ) الحل المبياني للمعادلة: $f(x)=1$

الحل المبياني للمعادلة هو أفاصيل نقط تقاطع C_f و المستقيم $(\Delta): y=1$ وبما أن نقط التقاطع هما $A(2,1)$ و $B(-2,1)$

فان مجموعة الحلول: $S=\{-2;2\}$

ب) الحل الجبري للمعادلة: $f(x)=1$

$\frac{1}{4}x^2=1$ يعني $x^2=4$ يعني $x=\sqrt{4}$ أو $x=-\sqrt{4}$ يعني $x=2$ أو $x=-2$ ومنه فان مجموعة الحلول: $S=\{-2;2\}$

7) رسم المستقيم الذي معادلته : $(D)\ :\ y=\frac{1}{2}x+2$

8) أ) الحل المبياني للمعادلة $f(x)=\frac{1}{2}x+2$

الحل المبياني للمعادلة هو أفاصيل نقط تقاطع C_f و المستقيم $(D)\ :\ y=\frac{1}{2}x+2$ وبما أن نقط التقاطع هما $E(4,4)$ و $B(-2,1)$

ومنه فان مجموعة الحلول: $S=\{-2;4\}$

أ) الحل الجبري للمعادلة $f(x)=\frac{1}{2}x+2$

$\frac{1}{4}x^2=\frac{1}{2}x+2$ يعني $x^2=2x+8$ يعني $x^2-2x-8=0$

يعني $\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times1\times(-8)=36=(6)^2>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=4$ و $x_2=-2$

ومنه فان مجموعة الحلول: $S=\{-2;4\}$

9) أ) الحل المبياني للمتراجحة $\frac{1}{4}x^2-2\ge\frac{1}{2}x$

$\frac{1}{4}x^2\ge\frac{1}{2}x+2$ يعني $f(x)\ge\frac{1}{2}x+2$

ومنه مبيانيا نبحث عن المجال بحيث منحنى الدالة f يوجد فوق المستقيم $(D)\ :\ y=\frac{1}{2}x+2$ أي $S=]-\infty,-2]\cup[4,+\infty[$

ب) الحل الجبري للمتراجحة $\frac{1}{4}x^2-2\ge\frac{1}{2}x$

$x^2-2\ge\frac{1}{2}x$ يعني $x^2\ge2x+8$ يعني $x^2-2x-8\ge0$

$x_1=4$ و $x_2=-2$

جدول الاشارة:

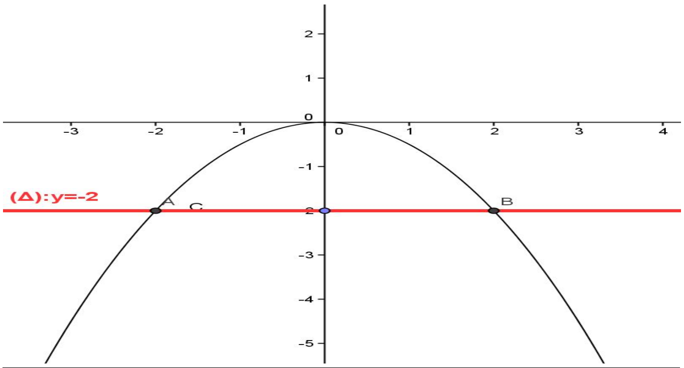
x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
x^2-2x-8		$+$	0	$-$	0	$+$	

أي $S=]-\infty,-2]\cup[4,+\infty[$

تمرين 10: لتكن f دالة معرفة ب: $f(x)=-\frac{1}{2}x^2$.

1) مثل الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$.

2) حل مبيانيا المتراجحة $f(x)>-2$



2)مبيانيا نبحث عن المجال بحيث منحنى الدالة f يوجد فوق المستقيم $(\Delta)\ :\ y=-2$ أي $S=]-2,2[$

تمرين 11: لتكن f الدالة المعرفة ب: $f(x)=\frac{2}{x}$ والمستقيم الذي معادلته: $(D):\ y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f.

2) أدرس زوجية الدالة f

3) حدد جدول تغيرات الدالة f .

4) أرسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f والمستقيم (D) في معلم

5) حل مبيانيا ثم جبريا المعادلة $\frac{2}{x}=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

6) حل مبيانيا المتراجحة : $\frac{2}{x}\geq\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

أجوبة: 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\neq0\}$

ومنه : $D_f=\mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}^*$

2) أ) لكل x من $\mathbb{R}^*$ لدينا: $-x$ تنتمي إلى $\mathbb{R}^*$.

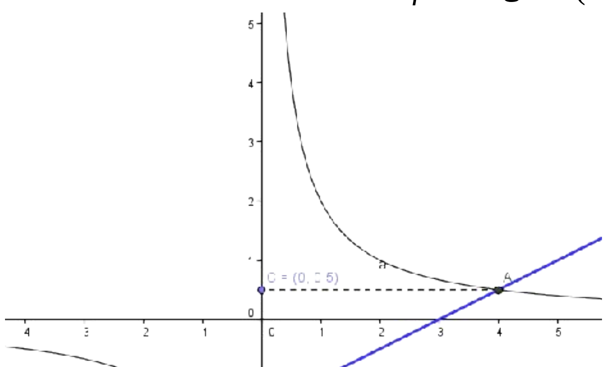
ب) $f(-x)=\frac{2}{(-x)}=-\frac{2}{x}=-f(x)$

ومنه الدالة f فردية

3)جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	‖	↘

4) منحنى الدالة f .



5)ا)الحل المبياني للمعادلة: $\frac{2}{x}=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

$\frac{2}{x}=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ يعني $f(x)=y$

الحل المبياني للمعادلة هو أفاصيل نقط تقاطع C_f و المستقيم (D)

وبما أن نقط التقاطع هما $A\left(4,\frac{1}{2}\right)$ و $A(-1,-2)$

فان مجموعة الحلول : $S=\{-1;4\}$

ا)الحل الجبري للمعادلة: $\frac{2}{x}=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ $\quad x\neq0$

$\frac{2}{x}=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ يعني $2x\times\frac{2}{x}=2x\times\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)$

(بضرب طرفي المعادلة في 2x)

يعني $4=x^2-3x$ يعني $x^2-3x-4=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times1\times(-4)=25=(5)^2>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=4$ و $x_2=-1$

ومنه فان مجموعة الحلول : $S=\{-1;4\}$

6) حل مبيانيا المتراجحة : $\frac{2}{x}\geq\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

مبيانيا نبحث عن المجال بحيث منحنى الدالة f يوجد فوق المستقيم (D) أي $S=]-\infty,-1]\cup[0,4]$

تمرين 12: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=-x^2+4x+5$

1) حدد D_f $\quad$ 2) تحقق أن : $f(x)=-(x-2)^2+9$

3)حدد جدول تغيرات الدالة f $\quad$ 4)حدد نقط تقاطع منحنى الدالة f مع محوري المعلم $\quad$ 5) أرسم (C) التمثيل المبياني للدالة f

6)حدد القيم الدنيا والقصوى ان وجدت

7) ناقش مبيانيا حسب قيم البارامتر m عدد حلول المعادلة : $x^2-4x-5+m=0$

أجوبة: 1) $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2) $f(x)=-x^2+4x+5=-(x^2-4x)+5=-(x^2-2\times x\times2+2^2-2^2)+5$

$f(x)=-(x-2)^2+4+5=-(x-2)^2+9$

بالمقارنة مع كتابة الشكل القانوني: $f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta$

نجد : $\alpha=-2;\beta=9;a=-1$

3) حدد جدول تغيرات الدالة f . لدينا : $a\prec0$ اذن :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	↘	9	↗

4)أ)نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاصيل

نحل فقط المعادلة : $f(x)=0$ يعني $-x^2+4x+5=0$

نحل المعادلة باستعمال المميز

$a=-1$ و $b=4$ و $c=5$

$\Delta=b^2-4ac=(4)^2-4\times5\times(-1)=36=(6)^2>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$$x_2=\frac{-4-\sqrt{36}}{-2}=5 \quad \text{و} \quad x_1=\frac{-4+\sqrt{36}}{-2}=-1$$

ومنه نقط التقاطع هما: $A(-1;0)$ أو $B(5;0)$

ملاحظة: يمكن حل المعادلة بطريقة أخرى باستعمال الكتابة الأخرى ل $f(x)$

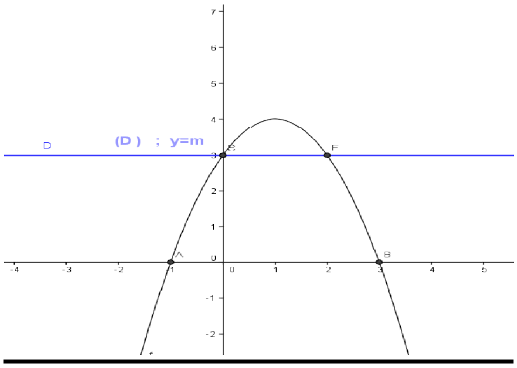
ب)نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأراتيب

نحسب فقط : $f(0)$ $\quad f(0)=-0^2+2\times0+3=3$

ومنه نقطة التقاطع هي: $C(0;3)$

-2	-1	0	1	2	3	4
-5	0	3	4	9	0	-5

5)رسم: C_f



6) $f(x)=-(x-1)^2+4$

لدينا $-(x-1)^2\le0$ مهما تكن x من $\mathbb{R}$.

ومنه $4-(x-1)^2\le4$ أي $f(x)\le4$ مهما تكن x من $\mathbb{R}$

وبالتالي إن 4 هي قيمة قصوى للدالة f على $\mathbb{R}$

يمكننا ملاحظة ذلك من جدول التغيرات

7)المناقشة مبيانيا حسب قيم البارامتر m ل عدد حلول المعادلة $-x^2+2x+3-m=0$:

$-x^2+2x+3-m=0$ تكافئ $-x^2+2x+3=m$ أي $f(x)=m$

أي نحدد مبيانيا عدد نقط تقاطع منحنى الدالة f و المستقيم (D) الذي معادلته : $y=m$

اذا كانت: $m>4$ التمثيل المبياني لا يقطع المستقيم (D) ومنه لا يوجد حل لهذه المعادلة أي $S=\varnothing$

اذا كانت: $m=4$ التمثيل المبياني يقطع المستقيم (D) في نقطة وحيدة ومنه للمعادلة حل وحيد $S=\{x_1\}$

اذا كانت: $m<4$ التمثيل المبياني يقطع المستقيم (D) في نقطتين ومنه للمعادلة حلين مختلفين $S=\{x_1,x_2\}$

تمرين 13: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=ax^2+bx+1$

1) حدد a و b علما أن (C_f) التمثيل المبياني للدالة f يمر من النقطتين $A(1,5)$ و $B(-1,1)$

2) تحقق أن : $f(x)=2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$ وحدد جدول تغيرات f

3) أرسم (C_f)

4) نعتبر المستقيم الذي معادلته $y=6x-1$ (D)

أ) أرسم (D)

ب) بين أن التمثيل المبياني للدالة f يوجد فوق المستقيم (D)

$f(x)=ax^2+bx+1$

الأجوبة : 1)

$A(1,5)\in(C_f)$ يعني: $f(1)=5$ يعني : $a\times(1)^2+b\times1+1=5$

$B(-1,1)\in(C_f)$ يعني: $f(-1)=1$ يعني: $a\times(-1)^2+b\times(-1)+1=1$

اذن نحل النظمة التالية: $\begin{cases}a+b+1=5\\a-b+1=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a+b=4\\a-b=0\end{cases}$

نجمع المعادلتين طرف لطرف فنجد: $2a=4 \Leftrightarrow a=2$

ولدينا $a-b=0 \Leftrightarrow a=b$ ومنه $a=b=2$

2)حسب السؤال السابق: $f(x)=2x^2+2x+1$

نتحقق أن : $f(x)=2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$

$$2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=2\left(x^2+2\times x\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)+\frac{1}{2}$$

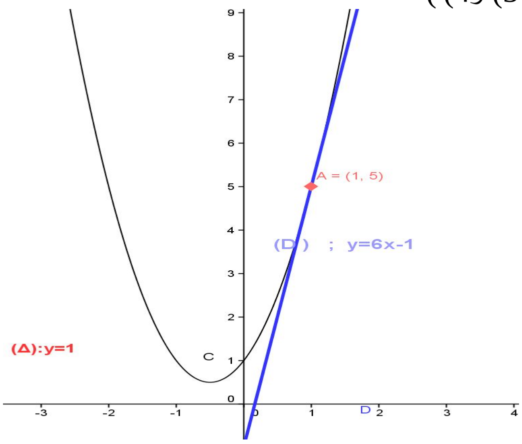
$$=2\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}$$

$$=2x^2+2x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=2x^2+2x+1=f(x)$$

ومنه جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$-1/2$	$\nearrow$

3) و4)أ)



4)ب) يجب أن نبين أن $f(x)-y\ge0$?????

$f(x)-y=2x^2+2x+1-6x+1=2x^2-4x+2=2(x^2-2x+1)$

$=2(x^2-2\times x\times1+1^2)=2(x-1)^2\ge0$ لأن المربع دائما موجب

ومنه $f(x)\ge y$ وبالتالي (C_f) يوجد فوق المستقيم (D)

انتهى الدرس

تمارين للبحث والتثبيت

تمرين 1: لتكن f دالة معرفة ب: $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+2}$.

1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .

2) بين أن: $f(x)=2-\dfrac{1}{x+2}$ مهما تكن x من D_f .

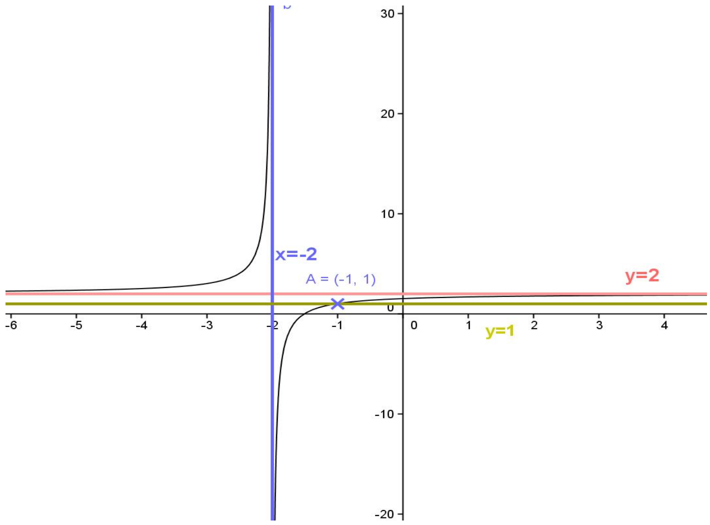
3) حدد جدول تغيرات الدالة f وحدد مقاربات منحنى الدالة f .

4) حدد نقط تقاطع (C_f) لمنحنى للدالة f مع محور الأفاصيل.

5) حدد نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأراتيب.

6) أرسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f .

7) حل جبريا ثم مبيانيا المعادلة $f(x)=1$



تمرين 2: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=2x^2-4x+5$

1) حدد D_f 2) تحقق أن : $f(x)=2(x-1)^2+3$

(يسمى الشكل القانوني $f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta$)

3) حدد جدول تغيرات الدالة f

4) أرسم (C) التمثيل المبياني للدالة f

تمرين 3: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=x^2-x+\dfrac{5}{4}$

و الدالة g المعرفة كالتالي : $g(x)=\dfrac{-1}{x}$

1) حدد الشكل القانوني ل $f(x)$ و حدد جدول تغيرات الدالة f و أرسم (C_f) التمثيل المبياني للدالة f

2) تحقق أن $f\left(\dfrac{-1}{2}\right)=g\left(\dfrac{-1}{2}\right)$ و و أرسم (C_g) التمثيل المبياني للدالة f في نفس المعلم

3) حدد مبيانيا مجموعة حلول المتراجحة

تمرين 4: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=\dfrac{1}{4}x^2+2x$

1) حدد D_f 2) حدد الشكل القانوني ل : $f(x)$

3)حدد جدول تغيرات الدالة f

4)حدد نقط تقاطع منحنى الدالة f مع محوري المعلم

5) أرسم (C) التمثيل المبياني للدالة f

تمرين 5: لتكن f دالة معرفة على المجال $[-2;6]$ و الجدول التالي يمثل جدول تغيراتها على المجال $[-2;6]$.

x	-2		0		4		6
$f(x)$	-1	↗	2	↘	-3	↗	4

حدد قيمة قصوى و قيمة دنيا للدالة f على المجال $[-2;6]$.

تمرين 6: لتكن f دالة معرفة ب: $f(x)=\dfrac{-3}{x+2}$.

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .
2. أدرس رتابة الدالة f على كل من المجالين: $]-2;+\infty[$ و $]-\infty;-2[$.
3. حدد جدول تغيرات الدالة f .

ملاحظات عامة حول الدرس