الهندسة

ملخص لدرس: التحويلات الاعتيادية في المستوى مع تمارين وأمثلة محلولة

الأهداف والقدرات المنتظرة من الدرس :

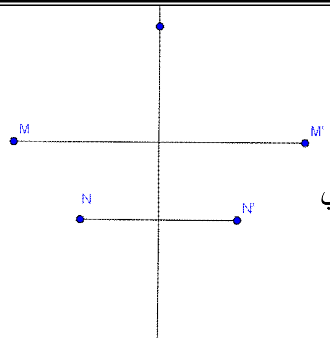
محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
- تذكير: التماثل المحوري، التماثل المركزي، الإزاحة؛ - التحاكي؛ - الخاصية المميزة لكل من الإزاحة والتحاكي، حالة التماثل المركزي؛ - الحفاظ على معامل استقامية متجهتين؛ - المسافة والتحويلات السابقة؛ - صور بعض الأشكال (قطعة، مستقيم، نصف مستقيم، دائرة، زاوية).	- التعرف على تقايس وتشابه الأشكال باستعمال الإزاحة والتحاكي والتماثل. - استعمال الإزاحة والتحاكي والتماثل في حل مسائل هندسية.	- يتم التذكير بالتماثل المحوري والتماثل المركزي والإزاحة من خلال أنشطة وتمارين وتعريفها متجهيا أو تآلفيا. - يقدم التحاكي من خلال أمثلة وبنفس الطريقة التي **قدمت** به التحويلات السابقة. - تعتبر الصيغ التحليلية لهذه التحويلات خارج المقرر.

I. تعاريف:

1. التماثل المحوري:

ليكن (D) مستقيما من المستوى.

التماثل المحوري الذي محوره (D) هو التحويل المستوي $S_{(D)}$ الذي يربط كل نقطة من المستوى (P) بالنقطة M' حيث يكون (D) واسطا للقطعة $[MM']$.

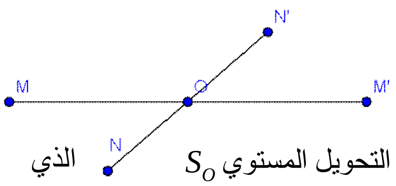


ملاحظة: إذا كانت M تنتمي إلى المستقيم (D) فان $S_{(D)}(M)=M$.

$S_{(D)}(M)=M'$ $\quad$ $S_{(D)}(N)=N'$

2. التماثل المركزي

لتكن O نقطة من المستوى (P). التماثل المركزي الذي مركزه O هو التحويل المستوي S_O الذي يربط كل نقطة M من المستوى (P) بالنقطة M' حيث تكون النقطة O منتصف القطعة $[MM']$.

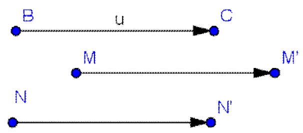


ملاحظة: $S_O(O)=O$

$S_O(M)=M'$ تعني O منتصف القطعة $[MM']$.

3. الإزاحة:

لتكن $\vec{u}$ متجهة غير منعدمة من المستوى. الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}$ هي التحويل المستوي الذي يربط كل نقطة M من المستوى (P) بالنقطة M' حيث $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$.



$t(M)=M'$ و $t(N)=N'$

تمرين 1: ليكن $ABCD$ معينا مركزه O, و I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[AD]$

1) أنشئ الشكل.

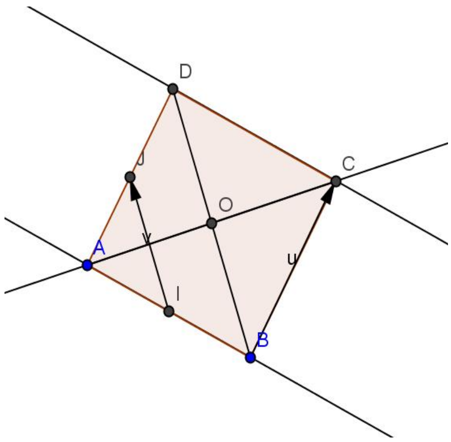
2) حدد $S_O(A)$ و $S_O(B)$ و $S_O(O)$ و $S_O((AB))$

3) $S_{(AC)}(B)$ و $S_{(AC)}(A)$ و $S_{(AC)}(O)$ و $S_{(AC)}([AB])$ و $S_{(AC)}(I)$ و $S_{(AC)}((OI))$

4) حدد $t_{\overrightarrow{BC}}(A)$ و $t_{\overrightarrow{IJ}}(B)$ و $t_{\overrightarrow{IJ}}([OB])$

أجوبة :

(1



(2

- $S_O(A)=C$

لأن : $OA=OC$

- $S_O(B)=D$

لأن : $OB=OD$

- $S_O(O)=O$

نقول النقطة O صامدة

- بحث عن $S_O((AB))$: صورة المستقيم (AB)

لدينا : $\begin{cases} S_O(A)=C \\ S_O(B)=D \end{cases}$ اذن : $S_O((AB))=(CD)$

نلاحظ أن صورة متقيم بواسطة تماثل مركزي هو مستقيم يوازيه

(3

- $S_{(AC)}(B)=D$ لأن : (AC) واسطا للقطعة $[BD]$.
- $S_{(AC)}(A)=A$ لأن : كل النقط التي تنتمي الى (AC) صامدة
- $S_{(AC)}(O)=O$ لأن : $O\in(AC)$ وكل النقط التي تنتمي الى (AC) صامدة
- $S_{(AC)}([AB])=[AD]$ لأن : $\begin{cases} S_{(AC)}(A)=A \\ S_{(AC)}(B)=D \end{cases}$
- $S_{(AC)}(I)$ ؟؟؟؟؟؟

لدينا I منتصف $[AB]$ و $S_{(AC)}([AB])=[AD]$ اذن $S_{(AC)}(I)$ هو منتصف $[AD]$ أي النقطة J ومنه $S_{(AC)}(I)=J$

- $S_{(AC)}((OI))$ ؟؟؟؟؟

لدينا $\begin{cases} S_{(AC)}(O)=O \\ S_{(AC)}(I)=J \end{cases}$ اذن $S_{(AC)}((OI))=(OJ)$

(4

• $t_{\overrightarrow{BC}}(A)$ ؟؟؟؟

لدينا $ABCD$ معين اذن $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ ومنه : $t_{\overrightarrow{BC}}(A)=D$

• $t_{\overrightarrow{IJ}}(B)$ ؟؟؟؟

نعتبر المثلث : ABD : لدينا I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[AD]$ اذن : $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{IJ}$ ونعلم أن O منتصف $[BD]$

اذن $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BO}$ ومنه : $2\overrightarrow{BO}=2\overrightarrow{IJ}$ أي : $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{IJ}$

وبالتالي : $t_{\overrightarrow{IJ}}(B)=O$

• $t_{\overrightarrow{IJ}}([OB])$ ؟؟؟؟

لدينا $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{IJ}$ و O منتصف $[BD]$ اذن : $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD}$

ومنه $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{IJ}$ أي : $t_{\overrightarrow{IJ}}(O)=D$ ونعلم أن : $t_{\overrightarrow{IJ}}(B)=O$

اذن : $t_{\overrightarrow{IJ}}([OB])=[DO]$

4. التحاكي:

لتكن Ω نقطة من المستوى و k عددا حقيقيا غير منعدم
التحاكي h الذي مركزه Ω و نسبته k هو التحويل المستوي الذي يربط كل نقطة M من المستوى (P) بالنقطة M' حيث $\overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}$.

ملاحظة: إذا كانت $k=-1$ فان التحويل h هو تماثل مركزي مركزه Ω.

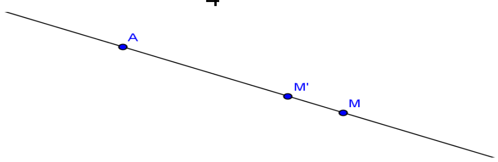
$h(M)=M'$ يعني أن النقط Ω و M و M' مستقيمية.

$h(M)=M'$ يعني $\overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}$

$h(N)=N'$ يعني $\overrightarrow{\Omega N'}=k\overrightarrow{\Omega N}$

تمرين 2: لتكن A و M نقطتين من المستوى , أرسم النقطة M' صورة النقطة M بالتحاكي h ذا المركز A و نسبته $\frac{3}{4}$

الجواب : $h(M)=M'$ يعني $\overrightarrow{AM'}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AM}$



تمرين 3: عبر عن العلاقة المتجهية : $\overrightarrow{IC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{IB}$ بتحاك

الجواب :اذا اعتبرنا h التحاكي الذي مركزه I و نسبته $k=-\frac{2}{3}$

أي : $h\left(I,-\frac{2}{3}\right)$ فان : $\overrightarrow{IC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{IB}$ يعني $h(B)=C$

تمرين4: حدد نسبة و مركز التحاكي h الذي يحول A إلى B في الحالات التالية :

1. $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ حيث I نقطة معلومة
2. $2\overrightarrow{\Omega B}=-\overrightarrow{BA}$ حيث Ω نقطة معلومة
3. $3\overrightarrow{IA}-5\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ حيث I نقطة معلومة

الأجوبة : $h(I,k)$: $h(A)=B$ يعني $\overrightarrow{IB}=k\overrightarrow{IA}$

1) $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

يعني $2\overrightarrow{IA}+3\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}\right)=\vec{0}$ يعني $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{AI}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

يعني $2\overrightarrow{IA}-3\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ يعني $-\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

يعني $\overrightarrow{IB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$ ومنه $h\left(I,\frac{1}{3}\right)$

2) $2\overrightarrow{\Omega B}=-\overrightarrow{BA}$

يعني $2\overrightarrow{\Omega B}=\overrightarrow{AB}$ يعني $2\overrightarrow{\Omega B}=\overrightarrow{A\Omega}+\overrightarrow{\Omega B}$

يعني $2\overrightarrow{\Omega B}-\overrightarrow{\Omega B}=-\overrightarrow{\Omega A}$ يعني $\overrightarrow{\Omega B}=-\overrightarrow{\Omega A}$

ومنه $h(\Omega,-1)$

3) $3\overrightarrow{IA}-5\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

يعني $3\overrightarrow{IA}-5\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}\right)=\vec{0}$ يعني $3\overrightarrow{IA}-5\overrightarrow{AI}-5\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

يعني $3\overrightarrow{IA}+5\overrightarrow{IA}-5\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ يعني $8\overrightarrow{IA}=5\overrightarrow{IB}$

يعني $\overrightarrow{IB}=\frac{8}{5}\overrightarrow{IA}$ ومنه $h\left(I,\frac{8}{5}\right)$

II. الخاصيات المميزة لكل من التحاكي و الازاحة والتماثل المركزي

ليكن T تحويلا اعتياديا في المستوى و $k\in\mathbb{R}^*-\{1\}$

تمرين 5: ليكن h التحاكي الذي مركزه Ω ونسبته k ويحول M إلى M' و يحول N إلى N'

بين أن : $\overrightarrow{M'N'}=k\overrightarrow{MN}$

الجواب :

$h(M)=M'$ يعني $\overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}$

$h(N)=N'$ يعني $\overrightarrow{\Omega N'}=k\overrightarrow{\Omega N}$

$$\overrightarrow{M'N'}=\overrightarrow{M'\Omega}+\overrightarrow{\Omega N'}=-\overrightarrow{\Omega M'}+\overrightarrow{\Omega N'}$$

$$\overrightarrow{M'N'}=-k\overrightarrow{\Omega M}+k\overrightarrow{\Omega N}=k\left(-\overrightarrow{\Omega M}+\overrightarrow{\Omega N}\right)$$

$$\overrightarrow{M'N'}=k\left(\overrightarrow{M\Omega}+\overrightarrow{\Omega N}\right)=k\overrightarrow{MN}$$

يمكن تعميم النتيجة ونحصل عن الخاصية التالية:

خاصية:(الخاصية المميزة للتحاكي)

يكون التحويل T تحاكيا نسبته k اذا وفقط اذا كان : $\overrightarrow{M'N'}=k\overrightarrow{MN}$
بحيث : $T(M)=M'$ و $T(N)=N'$

تمرين 6: ليكن $t_{\vec{u}}$ الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}$ بحيث تحول M إلى M' و تحول N إلى N'

بين أن : $\overrightarrow{M'N'}=\overrightarrow{MN}$

الجواب : $t_{\vec{u}}(M)=M'$ يعني $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$ و $t_{\vec{u}}(N)=N'$ يعني $\overrightarrow{NN'}=\vec{u}$

ومنه : $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{NN'}$ اذن : $MM'N'N$ متوازي الأضلاع

وبالتالي: $\overrightarrow{M'N'}=\overrightarrow{MN}$

يمكن تعميم النتيجة ونحصل عن الخاصية التالية:

خاصية:(الخاصية المميزة للازاحة)

يكون التحويل T ازاحة اذا وفقط اذا كان : $\overrightarrow{M'N'}=\overrightarrow{MN}$ بحيث :
$T(M)=M'$ و $T(N)=N'$

ملاحظة:بما أن التماثل المركزي هو تحاكي نسبته $k=-1$ نحصل على الخاصية التالية :

خاصية:(الخاصية المميزة للتماثل المركزي)

يكون التحويل T تماثلا مركزيا اذا وفقط اذا كان :
$\overrightarrow{M'N'}=-\overrightarrow{MN}$ بحيث : $T(M)=M'$ و $T(N)=N'$

III. خاصيات

نشاط: $h(O;2)$ أرسم $h(M)=M'$ و $h(N)=N'$

ماذا تلاحظ؟

❖ كل هذه التحويلات تحافظ على المسافة باستثناء التحاكي الذي نسبته k بحيث $|k|\neq 1$.

❖ كل هذه التحويلات تحافظ على المنتصف.

❖ كل هذه التحويلات تحافظ على الاستقامية و التوازي و التعامد و قياس الزوايا الهندسية.

IV. صور بعض الأشكال:

❖ صورة مستقيم (Δ) بواسطة ازاحة أو تماثل مركزي أو تحاك هو مستقيم (Δ') يوازي (Δ).

❖ صورة قطعة $[AB]$ هي قطعة $[A'B']$ تقايس $[AB]$ إذا كان التحويل إزاحة أو تماثلا. أما إذا كان التحويل تحاكيا نسبته k فان $A'B'=|k|AB$.

❖ صورة دائرة (E) ذات المركز c و الشعاع r هي دائرة مركزها c' صورة c و شعاعها r إذا كان التحويل إزاحة أو تماثلا و شعاعها $|k|\cdot r$. إذا كان التحويل تحاكيا نسبته k.

❖ صورة الزاوية $[\widehat{AOB}]$ هي الزاوية $[\widehat{A'O'B'}]$

$\widehat{A'O'B'}=\widehat{AOB}$

حيث A' و B' و O' هي صور A و B و O على التوالي بالتحويل.

تمرين 7: ليكن $ABCD$ متوازي الأضلاع و I و J نقطتين معرفتين ب $\overrightarrow{CI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{DC}$.

1) أنشئ الشكل.

2) بين أن (BJ) صورة (AI) بالإزاحة $t_{\overrightarrow{AB}}$. وماذا تستنتج بالنسبة للمستقيمين (BJ) و (AI)؟

3) نعتبر التحاكي h ذا المركز I و الذي يحاول B إلى C .

أ) بين أن $h((AB))=(CD)$.

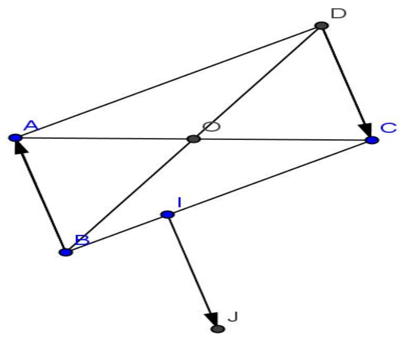
ب) أثبت أن نسبة h هي العدد -2.

4) لتكن K نقطة حيث $\overrightarrow{KI}=2\overrightarrow{AB}$.

أ) بين أن $h(J)=K$.

ب) أثبت أن $AI=\frac{1}{2}CK$.

الأجوبة: 1)



2)نبين أن : : $t_{\overrightarrow{AB}}(I)=J$ ؟؟؟؟؟

لدينا $ABCD$ متوازي الأضلاع اذن $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$

ولدينا حسب المعطيات : $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{DC}$

ومنه $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AB}$ أ ي: $t_{\overrightarrow{AB}}(I)=J$

ولدينا : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}$ اذن $t_{\overrightarrow{AB}}(A)=B$

لدينا اذن : $\begin{cases} t_{\overrightarrow{AB}}(I)=J \\ t_{\overrightarrow{AB}}(A)=B \end{cases}$ وبالتالي : $t_{\overrightarrow{AB}}((AI))=(BJ)$

❖ الاستنتاج: نعلم أن صورة مستقيم بواسطة ازاحة هو مستقيم يوازيه اذن $(AI)\parallel(BJ)$

3) أ) لدينا حسب المعطيات : $h(B)=C$

ونعلم أن صورة المستقيم (AB) بواسطة تحاك هو مستقيم يوازيه ويمر من صورة B أي يمر من C

اذن هو المستقيم (CD)

وبالتالي: $h((AB))=(CD)$

3) ب) $h(B)=C$ يعني $\overrightarrow{IC}=k\overrightarrow{IB}$

ونعلم حسب المعطيات أن: $\overrightarrow{CI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ يعني $3\overrightarrow{CI}=2\overrightarrow{CB}$

يعني $3\overrightarrow{CI}=2\left(\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IB}\right)$ يعني $3\overrightarrow{CI}=2\overrightarrow{CI}+2\overrightarrow{IB}$

يعني $3\overrightarrow{CI}-2\overrightarrow{CI}=2\overrightarrow{IB}$ يعني $\overrightarrow{CI}=2\overrightarrow{IB}$

يعني $\overrightarrow{IC}=-2\overrightarrow{IB}$ ومنه $k=-2$

5) أ) $h(J)=K$ ؟؟؟؟؟

ونعلم حسب المعطيات أن: $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{DC}$ وأن : $\overrightarrow{KI}=2\overrightarrow{AB}$

اذن : $\overrightarrow{KI}=2\overrightarrow{IJ}$ يعني $\overrightarrow{IK}=-2\overrightarrow{IJ}$

و هذا يعني أن : $h(J)=K$

أ) وجدنا اذن : $\begin{cases} h(J)=K \\ h(B)=C \end{cases}$ اذن : $\overrightarrow{CK}=-2\overrightarrow{BJ}$

(حسب الخاصية المميزة للتحاكي)

ومنه بالمرور الى المنظم نجد :

$\left\|\overrightarrow{CK}\right\|=\left\|-2\overrightarrow{BJ}\right\|$ اذن : $\left\|\overrightarrow{CK}\right\|=|-2|\left\|\overrightarrow{BJ}\right\|$

اذن : $CK=2BJ$

وجدنا $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AB}$: ادن $ABJI$ متوازي الأضلاع اذن

$BJ=AI$: اذن $CK=2AI$ يعني $AI=\frac{1}{2}CK$

V. الحفاظ على معامل استقامية متجهتين:

ليكن T تحويلا اعتياديا في المستوى و A و B و C و D نقط و A' و B' و C' و D' صورهم بالتحويل T

اذا كان : $\overrightarrow{CD}=k\overrightarrow{AB}$: فان $\overrightarrow{C'D'}=k\overrightarrow{A'B'}$

تمرين 8: ليكن ABC مثلثا و I منتصف $[BC]$

نعتبر النقطتين B' و C' بحيث : $\overrightarrow{AB'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

و ليكن J منتصف $[B'C']$

وليكن h التحاكي الذي مركزه A نسبته $k=\frac{2}{3}$

1)بين أن : $\overrightarrow{B'C'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$:

2)باستعمال التحاكي h بين أن النقط J و A و I نقط مستقيمية

الأجوبة: 1) $\overrightarrow{AB'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ يعني : $h(B)=B'$

$\overrightarrow{AC'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ يعني : $h(C)=C'$ اذن : $\overrightarrow{B'C'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

(حسب الخاصية المميزة للتحاكي)

2) لدينا I منتصف $[BC]$ اذن $h(I)$: منتصف $[B'C']$

وبما أن : J منتصف $[B'C']$ فان : $h(I)=J$

ومنه : النقط J و A و I نقط مستقيمية **انتهى الدرس**

ملاحظات عامة حول الدرس

تمارين للبحث والتثبيت

تمرين 1: ABC مثلث محاط بدائرة (C) مركزها O أقطارها $[AD]$. لتكن I منتصف $[BC]$ و B' و C' صورتي B و C بالتحاكي $h(A;2)$. النقطة H المسقط العمودي ل D على المستقيم $(B'C')$.

1) أنشئ الشكل.
2) بين أن H منتصف $[B'C']$.
3) بين أن $h(I)=H$ ثم استنتج أن A و I و H مستقيمية.

تمرين 2: ليكن ABC مثلثا و G مركز ثقله

ليكن h التحويل الذي يحول M إلى M' بحيث :

$$\overrightarrow{M'A}+\overrightarrow{M'B}+\overrightarrow{M'C}=\overrightarrow{M'M}$$

بين أن h تحاك محددا مركزه ونسبته .

تمرين 3: ليكن ABC مثلثا و M نقطة من القطعة $[AB]$ و N نقطة داخل المثلث ABC

1) أنشئ النقطتين M' و N' صورتا النقطتين M و N على التوالي بالتحاكي $h(A;3)$

2) بين أن : $(M'N')\,||\,(MN)$

تمرين 4: ABC مثلث و H مركز تعامده. ننشئ خارجه مستطيلا $BCDE$.

المستقيم المار من D و الموازي للمستقيم (CH) يقطع (AB) في M.

المستقيم المار من E و الموازي للمستقيم (BH) يقطع (AC) في N.

1) بين أن $t_{\overrightarrow{EB}}((DM))=(CH)$.
2) لتكن I نقطة تقاطع (DM) و (EN).

بين أن $t_{\overrightarrow{EB}}(I)=H$ و استنتج أن النقط A و I و H مستقيمية

تمرين 5: ليكن $ABCD$ متوازي الأضلاع و I النقطة المعرفة ب $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ وليكن h التحاكي الذي مركزه I ويحول A إلى B

1) حدد نسبة التحاكي h
2) لتكن E نقطة تقاطع (AD) و (IC)

أ) بين أن $h(E)=C$

ب) استنتج أن : $BC=3AE$

3) نضع $h(D)=D'$ بين أن : B و C و D' نقط مستقيمية

.