ملخصي وقواعدي في الرياضيات لمستوى الثانية باك علوم فيزيائية وعلوم الحياة والأرض

من انجاز : الأستاذ نجيب عثماني أستاذ مادة الرياضيات في الثانوي تأهيلي

حساب الاحتمالات

المبدأ: لتكن E تجربة تتطلب نتائجها k اختيارا.
إذا كان الاختيار الأول يتم ب n_1 طريقة مختلفة, و الاختيار الثاني يتم ب n_2 طريقة مختلفة....و الاختيار k يتم ب n_k طريقة مختلفة. فان عدد النتائج الممكنة هو الجداء: $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \cdots \times n_k$.

عدد عناصر مجموعة منتهية E يسمى رئيسي E و نرمز له ب $CardE$.

خاصيات: لكل n من $\mathbb{N}^*$, و لكل p من $\mathbb{N}$ بحيث $0 \le p \le n$, لدينا:

- عدد التبديلات ل n عنصر من بين n هو: $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$ و نضع $0! = 1$.
ليكن n و p عنصرين من $\mathbb{N}^*$.
- عدد الترتيبات بتكرار ل p عنصر من بين n هو n^p.
- عدد الترتيبات بدون تكرار ل p عنصر من بين n عنصرا. له بالرمز A_n^p و لدينا: $A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1)$
- عدد التأليفات ل p عنصر من بين n هو $\dfrac{A_n^p}{p!}$, و نرمز له بالرمز C_n^p

و لدينا $C_n^p = \dfrac{n!}{p! \times (n-p)!}$ و $C_n^p = C_n^{n-p}$ و $C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}$

و $C_n^0 = 1$ و $C_n^n = 1$ و $C_n^{n-1} = n$ و $C_n^1 = n$

ملاحظة :

- عند السحب بالتتابع وبدون إحلال نستعمل الرمز A_n^p
- عند السحب الآني نستعمل الرمز C_n^p
- عند السحب بالتتابع وبإحلال نستعمل الرمز مبدأ الجداء

خاصية: ليكن Ω كون إمكانية تجربة عشوائية:

- $p(\Omega) = 1$ و $p(\phi) = 0$
- لكل حدث A, $0 \le p(A) \le 1$
- وكل حدثين غير منسجمين A و B (أي $A \cap B = \phi$) $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
- لكل حدث A لدينا : $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$
- لكل حدثين A و B لدينا : $$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$
- إذا كانت جميع الأحداث الابتدائية متساوية الاحتمال في تجربة عشوائية كون إمكانيتها Ω, فان احتمال كل حدث A هو: $p(A) = \dfrac{CardA}{Card\Omega}$

الاحتمال الشرطي: ليكن A و B حدثين مرتبطين بنفس التجربة العشوائية بحيث $P(A) \ne 0$. احتمال الحدث B, علما أن الحدث A محقق, هو العدد الذي نرمز له بالرمز $p_A(B)$ أو $p(B/A)$.

ولدينا: $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$

استقلالية حدثين: لقول إن الحدثين A و B مستقلان إذا كان: $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

المتغيرات العشوائية- قانون احتمال متغير عشوائي:مثال: يحتوي صندوق على 6 كرات تحمل الأرقام: 0, 1, 1 , 2, 2, 2 لا يمكن التمييز بينها باللمس.ونسحب عشوائيا و تأنيا كرتين من الصندوق. ليكن Ω كون إمكانيات هذه التجربة العشوائية. وليكن X المتغير العشوائي التي يترابط كل سحبة بمجموع رقمي الكرتين المسحوبتين .

في هذه الحالة, إذا كانت الكرتان المسحوبتان تحملان الرقمين 0 و 1 على التوالي فان: $x = 1 + 0 = 1$

و إذا كانتا تحملان الرقمين 1 و 2 على التوالي فان $x = 1 + 2 = 3$ و هكذا نجد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X و هي تكون مجموعة نرمز لها بالرمز $X(\Omega)$ في هذا المثال لدينا: $X(\Omega) = \{1;2;3;4\}$

نرمز للحدث:" الحصول على مجموع يساوي 2" بالرمز: $(X = 2)$

قانون احتمال متغير عشوائي: غالبا ما نلخص قانون احتمال X في جدول: لنحدد في المثال السابق قانون احتمال المتغير العشوائي X.

لدينا: $X(\Omega) = \{1;2;3;4\}$

- $(X = 1)$ يعني الحصول على كرة تحمل الرقم 0, و على كرة تحمل الرقم 1. إذن $p(X = 1) = \dfrac{C_1^1 \times C_2^1}{C_6^2} = \dfrac{2}{15}$.
- $(X = 2)$ يعني الحصول على كرة تحمل الرقم 2 , و على كرة تحمل الرقم 0. أو الحصول على كرتين تحملان الرقم 1.
إذن: $p(X = 2) = \dfrac{C_1^1 \times C_3^1 + C_2^2}{C_6^2}$
- $(X = 3)$ يعني الحصول على كرة تحمل الرقم 1, و على كرة تحمل الرقم 2. إذن. $p(X = 3) = \dfrac{C_1^1 \times C_3^1}{C_6^2} = \dfrac{6}{15} = \dfrac{3}{5}$
- $(X = 4)$ يعني الحصول على كرتين تحملان الرقم 2, إذن: $p(X = 4) = \dfrac{C_3^2}{C_6^2} = \dfrac{3}{15} = \dfrac{1}{5}$

نلخص قانون احتمال المتغير العشوائي X في الجدول التالي:

x_i	1	2	3	4
$p(X = x_i)$	$\dfrac{2}{15}$	$\dfrac{4}{15}$	$\dfrac{6}{15}$	$\dfrac{3}{15}$

حساب الأمل الرياضي-المغايرة-الانحراف الطرازي لمتغير عشوائي:

الأمل الرياضي هو:

$$E(X) = \left(1 \times \frac{2}{15}\right) + \left(2 \times \frac{4}{15}\right) + \left(3 \times \frac{6}{15}\right) + \left(4 \times \frac{3}{15}\right) = \frac{40}{15} = \frac{8}{3}$$

- المغايرة هي:

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$V(X) = \left(1^2 \times \frac{2}{15}\right) + \left(2^2 \times \frac{4}{15}\right) + \left(3^2 \times \frac{6}{15}\right) + \left(4^2 \times \frac{3}{15}\right) - \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

- الانحراف الطرازي هو: $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\dfrac{8}{9}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

الاختبارات المتكررة والمتغير العشوائي الحداني:: نعتبر اختبارا بحيث نهتم فقط بتحقق أو عدم تحقق حدث A ليكن p احتمال الحدث A $p = p(A)$

نكرر هذا الاختبار n مرة متتالية وليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل عدد المرات التي يتحقق فيها الحدث A في نفس الظروف لدينا الخاصية التالية:

خاصية: احتمال تحقق الحدث A k مرة بالضبط هو: $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ لكل k من $\{0;1;2;\cdots;n\}$

X يسمى **لمتغير عشوائي حداني وسيطاه هما : n و p**

ولدينا : $E(X) = n \times p$ و $V(X) = n \times p \times (1-p)$