



توجيهات تربوية	القدرات المنتظرة	محتوى البرنامج
- يتم تقديم الجداء السلمي وخاصياته انطلاقا من الإسقاط العمودي. - ينبغي التأكيد على دور هذه الأداة في تحديد بعض المحلات الهندسية في المستوى وفي حساب الأطوال والمساحات وقياسات الزوايا. - تعتبر الصيغة التحليلية للجداء السلمي خارج المقرر.	- التعبير عن المسافة والتعامد بواسطة الجداء السلمي. - استعمال الجداء السلمي في حل مسائل هندسية. - استعمال مبرهنة الكاشي ومبرهنة المتوسط لحل تمارين هندسية.	- تعريف وخاصيات؛ - الصيغة المثلثية؛ - تعامد متجهتين؛ - بعض تطبيقات الجداء السلمي: العلاقات المترية في مثلث قائم الزاوية؛ مبرهنة المتوسط؛ مبرهنة الكاشي.

الجواب: $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = \|\overrightarrow{EF}\| \times \|\overrightarrow{EG}\| \cos(\widehat{FEG}) = -6$

يعني $EF \times EG \cos(\widehat{FEG}) = -6$

يعني $5 \times 3 \cos(\widehat{FEG}) = -6$

يعني $\cos(\widehat{FEG}) = -\frac{6}{15} = -\frac{2}{5}$

تمرين 4: ليكن ABC مثلثا بحيث $AB = 3$ و $AC = 4$

و $\widehat{BAC} = \frac{2\pi}{3}$ أحسب $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

الجواب: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos \hat{A} = AB \times AC \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 3 \cos\left(\frac{3\pi - \pi}{3}\right) = 12 \cos\left(\frac{3\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 12 \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 3 \cos\left(\frac{3\pi - \pi}{3}\right) = 12 \cos\left(\frac{3\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = -12 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

لأن: $\cos(\pi - x) = -\cos x$ إذن:

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -12 \times \frac{1}{2} = -6$

II. خاصيات الجداء السلمي:

لتكن \vec{u} و \vec{v} و \vec{w} ثلاث متجهات:

▪ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

▪ $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

▪ $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k\vec{u} \cdot \vec{v}$ من \mathbb{R} .

ملاحظة: $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$ نرسم ل $\vec{u} \cdot \vec{u}$ ب \vec{u}^2 و يسمى المربع السلمي.

▪ $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}^2$ إذن $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2}$

▪ و اذا كانت $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ فان $AB = \sqrt{AB^2}$

المتطابقات الهامة:

$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

$(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

تمرين 5: لتكن \vec{u} و \vec{v} متجهتين بحيث: $\|\vec{u}\| = 5$ و $\|\vec{v}\| = 3$ و $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\frac{3}{2}$

أحسب \vec{u}^2 و \vec{v}^2 و $(\vec{u} + \vec{v})^2$ و $(\vec{u} - \vec{v})^2$ و $(\vec{u} - \vec{v})(\vec{u} + \vec{v})$ و

$(5\vec{u} - \vec{v}) \cdot (5\vec{u} + \vec{v})$ و $(3\vec{u} - 2\vec{v}) \cdot (\vec{u} + 5\vec{v})$

الجواب: $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 = 5^2 = 25$ و $\vec{v}^2 = \|\vec{v}\|^2 = 3^2 = 9$

I. تعريف: تعريف 1: الجداء السلمي لمتجهتين:

لتكن \vec{u} و \vec{v} متجهتين من المستوى بحيث: $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ و H و المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB) .

الجداء السلمي للمتجهتين \vec{u} و \vec{v} هو العدد الحقيقي الذي يرمز له بالرمز $\vec{u} \cdot \vec{v}$ و المعروف بما يلي:

▪ إذا كانت \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AH} لهما نفس المنحى فان:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AH$

▪ إذا كانت \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AH} لهما منحيان متعاكسان فان:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = -AB \times AH$

▪ و نكتب $\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \cdot AC$ أو $\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \cdot AH$

تعريف 2: الصيغة المثلثية للجداء السلمي:

إذا كانت \vec{u} و \vec{v} متجهتين غير منعدمتين و α هو قياس الزاوية \widehat{BAC} حيث $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ فان:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \alpha$ **نتيجة:** $\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$

مثال أو تمرين 1: ليكن $\frac{\pi}{4}$ قياسا لزاوية المتجهتين \vec{u} و \vec{v}

حيث: $\|\vec{u}\| = \frac{5}{2}\sqrt{2}$ و $\|\vec{v}\| = 4$ أحسب $\vec{u} \cdot \vec{v}$

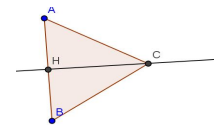
الجواب: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5}{2} \times 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$

تمرين 2: ليكن ABC مثلثا متساوي الأضلاع طول ضلعه يساوي 6cm وليكن H المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB) .

أحسب $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{HB}$ و $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

الجواب: بما أن المثلث متساوي الأضلاع فان كل زواياه متقايسة وقياس كل زاوية هو $\frac{\pi}{3}$

ومنه: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos \hat{A} = AB \times AC \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6 \times 6 \times \frac{1}{2} = 18$

$\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{HB} = \|\overrightarrow{CH}\| \times \|\overrightarrow{HB}\| \times \cos \hat{H} = CH \times HB \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = CH \times HB \times 0 = 0$

تمرين 3: ليكن EFG مثلثا بحيث: $EF = 5$ و $EG = 3$

و $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = -6$ أحسب $\cos(\widehat{FEG})$

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \times AC} \quad 1.$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \quad 2.$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) \text{ ومنه}$$

3. هناك علاقتين مماثلتين للعلاقة الأولى:

$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA \times CB \times \cos(\widehat{ACB})$$

$$AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2AB \times BC \times \cos(\widehat{ABC})$$

تمرين 7: ليكن ABC مثلثا بحيث: $\widehat{BAC} = \frac{2\pi}{3}$ و $AC = 8$

و $AB = 5$ (1) أحسب BC (2) $\cos \widehat{ACB}$

الجواب: (1) حساب BC

حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث ABC

لدينا: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos \widehat{BAC}$

يعني: $BC^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \times 8 \times 5 \cos \widehat{BAC}$

$$\text{يعني: } BC^2 = 89 - 80 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \quad \text{يعني: } BC^2 = 89 - 80 \cos\left(\frac{3\pi - \pi}{3}\right)$$

$$\text{يعني: } BC^2 = 89 - 80 \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \quad \text{يعني: } BC^2 = 89 - 80 \cos\left(\frac{3\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{يعني: } BC^2 = 89 - 80 \left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \quad \text{لأن } \cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\text{يعني: } BC^2 = 89 + 80 \left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{يعني: } BC^2 = 89 + 40 \quad \text{يعني: } BC^2 = 129$$

$$\text{يعني: } BC = \sqrt{129}$$

(2) حساب $\cos \widehat{ACB}$

حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث ABC

لدينا: $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times BC \cos \widehat{ACB}$

$$\text{يعني: } 5^2 = 8^2 + (\sqrt{129})^2 - 2 \times 8 \times \sqrt{129} \cos \widehat{ACB}$$

$$\text{يعني: } 25 = 64 + 129 - 16\sqrt{129} \cos \widehat{ACB}$$

$$\text{يعني: } 25 - 193 = -16\sqrt{129} \cos \widehat{ACB}$$

$$\text{يعني: } -168 = -16\sqrt{129} \cos \widehat{ACB} \quad \text{يعني}$$

$$\cos \widehat{ACB} = \frac{-168}{-16\sqrt{129}} = \frac{168\sqrt{129}}{2064} = \frac{21\sqrt{129}}{258} = \frac{7\sqrt{129}}{86}$$

V. مبرهنة المتوسط:

خاصية: ليكن ABC مثلثا و I منتصف القطعة $[BC]$

$$\text{لدينا: } AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$$

تذكير: مبرهنة المتوسط: إذا كانت A و B نقطتين من المستوى P

$$\text{و } I \text{ منتصف القطعة } [AB] \text{ فإن } MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

مثال: ليكن ABC مثلثا بحيث: $BC = 4cm$ و $AC = 6cm$

و $AB = 3cm$ و لتكن I منتصف $[BC]$ أحسب AI .

الجواب: حسب مبرهنة المتوسط على المثلث ABC لدينا:

$$3^2 + 6^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}4^2 \quad \text{يعني: } AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$$

$$\text{يعني: } 37 = 2AI^2 + \frac{16}{2} \quad \text{يعني: } 9 + 36 = 2AI^2 \quad \text{يعني: } 45 - 8 = 2AI^2$$

$$\text{يعني: } AI^2 = \frac{37}{2} \quad \text{يعني: } AI = \sqrt{\frac{37}{2}}$$

تمرين 8: ليكن ABM مثلثا بحيث: $AB = 4cm$ و $AM = 3cm$

$$\text{و } BM = 4cm$$

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 5^2 + 2(-\frac{3}{2}) + 3^2 = 25 - 3 + 9 = 31$$

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 5^2 - 2(-\frac{3}{2}) + 3^2 = 25 + 3 + 9 = 37$$

$$(\vec{u} - \vec{v})(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$$

$$(3\vec{u} - 2\vec{v}) \cdot (\vec{u} + 5\vec{v}) = 3\vec{u} \cdot \vec{u} + 3\vec{u} \cdot 5\vec{v} - 2\vec{v} \cdot \vec{u} - 2\vec{v} \cdot 5\vec{v}$$

$$(3\vec{u} - 2\vec{v}) \cdot (\vec{u} + 5\vec{v}) = 3\vec{u}^2 + 15\vec{u} \cdot \vec{v} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} - 10\vec{v}^2 = 3 \times 25 + 13\vec{u} \cdot \vec{v} - 10 \times 9$$

$$(3\vec{u} - 2\vec{v}) \cdot (\vec{u} + 5\vec{v}) = 75 + 13\left(-\frac{3}{2}\right) - 90 = -15 - \frac{39}{2} = -\frac{69}{2}$$

$$(5\vec{u} - \vec{v}) \cdot (5\vec{u} + \vec{v}) = (5\vec{u})^2 - (\vec{v})^2 = 25(\vec{u})^2 - (\vec{v})^2 = 25 \times 25 - 9 = 616$$

خاصية: تكون \vec{u} و \vec{v} متعامدين إذا و فقط إذا كان $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ و نكتب $\vec{u} \perp \vec{v}$

نتيجة: $(AB) \perp (CD)$ إذا و فقط إذا كان $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0$.

III. علاقات مترية في مثلث قائم الزاوية:

خاصية: ليكن ABC مثلثا و H المسقط العمودي للنقطة A على (BC) .

إذا كان ABC قائما في A فان:

$$(1) AB^2 + AC^2 = BC^2 \quad \text{(مبرهنة فيثاغورس)}$$

$$(2) AC \times AB = AH \times BC$$

$$(3) CA^2 = CH \times BC \quad \text{أو} \quad BA^2 = BH \times BC$$

$$(4) AH^2 = HB \times HC$$

$$\text{براهين: } (1) \quad BC^2 = \overline{BC}^2 = (\overline{BA} + \overline{AC})^2 = \overline{BA}^2 + 2\overline{BA} \cdot \overline{AC} + \overline{AC}^2$$

لدينا: $\overline{BA} \perp \overline{AC}$ لأن ABC قائما في A ان: $BC^2 = BA^2 + AC^2$

(2) باعتبار المثلث: (ABC) : $\sin \hat{B} = \frac{AC}{BC}$ و باعتبار المثلث:

$$(ABH) : \sin \hat{B} = \frac{AH}{AB} \quad \text{ومنه } \frac{AC}{BC} = \frac{AH}{AB} \quad \text{ومنه } AC \times AB = AH \times BC$$

(3) ليكن ABC مثلثا و H المسقط العمودي للنقطة A على (BC) .

$$\text{باعتبار المثلث: } (ABC) : \cos \hat{A} = \frac{AB}{AC}$$

$$\text{و باعتبار المثلث: } (ABH) : \cos \hat{B} = \frac{BH}{AB} \quad \text{ومنه } \frac{AB}{AC} = \frac{BH}{AB}$$

$$\text{ومنه } AC^2 = CH \times BC$$

تمرين 6: مثال: ABC مثلث قائم الزاوية في A و H المسقط

العمودي للنقطة A على (BC) . أحسب: AC و BH و AH و

$$HC \quad \text{علما أن: } AB = 2cm \quad \text{و } BC = 5cm$$

الجواب: حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة فان: $BC^2 = AB^2 + AC^2$

$$\text{يعني: } AC^2 = BC^2 - AB^2 = 21 \quad \text{يعني: } AC = \sqrt{21}cm$$

$$\text{و حسب العلاقات المترية لدينا: } AB^2 = BH \times BC$$

$$\text{يعني: } BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{4}{5}cm$$

$$\text{ولدينا: } AC^2 = CH \times CB \quad \text{يعني: } CH = \frac{AC^2}{BC} = \frac{21}{5}cm$$

$$\text{ولدينا: } AB \times AC = AH \times BC \quad \text{يعني: } AH = \frac{AB \times AC}{BC} = \frac{2\sqrt{21}}{5}cm$$

IV. مبرهنة الكاشي:

خاصية: ليكن ABC مثلثا

$$\text{لدينا: } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

نتائج:

و لتكن I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[AM]$ و K منتصف $[BM]$

أحسب المسافات MI و AK و BJ

الجواب: حساب MI : حسب مبرهنة المتوسط على المثلث ABM لدينا:

$$3^2 + 4^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}4^2 \text{ يعني } MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

$$17 = 2MI^2 \text{ يعني } 9 + 16 = 2MI^2 + \frac{16}{2}$$

$$\text{يعني: } MI^2 = \frac{17}{2} \text{ يعني } MI = \sqrt{\frac{17}{2}}$$

حساب AK : حسب مبرهنة المتوسط على المثلث ABM لدينا:

$$2^2 + 3^2 = 2AK^2 + \frac{1}{2}4^2 \text{ يعني } AB^2 + AM^2 = 2AK^2 + \frac{1}{2}BM^2$$

$$17 = 2AK^2 \text{ يعني } 25 - 8 = 2AK^2$$

$$\text{يعني: } AK^2 = \frac{17}{2} \text{ يعني } AK = \sqrt{\frac{17}{2}}$$

حساب BJ : حسب مبرهنة المتوسط على المثلث ABM لدينا:

$$4^2 + 4^2 = 2BJ^2 + \frac{1}{2}3^2 \text{ يعني } AB^2 + BM^2 = 2BJ^2 + \frac{1}{2}AM^2$$

$$\text{يعني: } 2BJ^2 = 32 - \frac{9}{2} = \frac{55}{2}$$

$$\text{يعني: } BJ^2 = \frac{55}{4} \text{ يعني } BJ = \frac{\sqrt{55}}{2}$$

تمرين 9: ليكن ABC مثلثا بحيث: $AB = 1$ و $AC = \sqrt{2}$ و $CB = 2$

و لتكن D نقطة بحيث $\vec{DB} + 2\vec{DC} = \vec{0}$

$$(1) \text{ بين أن: } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = -\frac{1}{2} \text{ واستنتج } \cos \hat{A}$$

(2) اكتب \vec{AD} بدلالة \vec{AB} و \vec{AC}

(3) أحسب $\vec{AD} \cdot \vec{AB}$ و استنتج طبيعة المثلث ABD

(4) أحسب AD

(5) ليكن I منتصف القطعة $[BC]$ و J منتصف القطعة $[AC]$

أحسب AI و BJ

الجواب (1): حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث ABC

$$\text{لدينا: } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos \hat{A}$$

$$\text{ونعلم أن: } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = \|\vec{AB}\| \times \|\vec{AC}\| \times \cos \hat{A} = AB \times AC \times \cos \hat{A}$$

$$\text{اذن: } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\vec{AB} \times \vec{AC}$$

$$2^2 = 1^2 + 2^2 - 2\vec{AB} \times \vec{AC}$$

$$\text{يعني: } 1 = -2\vec{AB} \times \vec{AC} \text{ يعني } 4 = 1 + 2 - 2\vec{AB} \times \vec{AC}$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = -\frac{1}{2}$$

استنتج: $\cos \hat{A}$: لدينا: $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos \hat{A}$ يعني

$$-\frac{1}{2} = 1 \times \sqrt{2} \times \cos \hat{A} \text{ يعني: } \cos \hat{A} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\cos \hat{A} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{2})^2} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$(2) \vec{DA} + \vec{AB} + 2(\vec{DA} + \vec{AC}) = \vec{0} \text{ يعني } \vec{DB} + 2\vec{DC} = \vec{0}$$

$$\vec{AB} + 3\vec{DA} + 2\vec{AC} = \vec{0} \text{ يعني } \vec{DA} + \vec{AB} + 2\vec{DA} + 2\vec{AC} = \vec{0}$$

$$\vec{AB} + 2\vec{AC} = 3\vec{AD} \text{ يعني } \vec{AB} + 2\vec{AC} = -3\vec{DA}$$

$$\vec{AD} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + 2\vec{AC}) \text{ يعني}$$

$$(3) \vec{AD} \cdot \vec{AB} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + 2\vec{AC}) \cdot \vec{AB} = \frac{1}{3}(\vec{AB} \cdot \vec{AB} + 2\vec{AC} \cdot \vec{AB})$$

$$= \frac{1}{3}(\vec{AB}^2 + 2\vec{AC} \cdot \vec{AB}) = \frac{1}{3}(AB^2 + 2\vec{AC} \cdot \vec{AB}) = \frac{1}{3}\left(1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 0$$

ومنه: $\vec{AD} \cdot \vec{AB} = 0$ وبالتالي $\vec{AD} \perp \vec{AB}$ أي: ABD قائم الزاوية في A

$$(4) \text{ لدينا: } \vec{AD} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + 2\vec{AC}) \text{ اذن: } \vec{AD}^2 = \left(\frac{1}{3}(\vec{AB} + 2\vec{AC})\right)^2$$

$$\text{اذن: } AD^2 = \frac{1}{9}(\vec{AB}^2 + 4\vec{AB} \cdot \vec{AC} + 4\vec{AC}^2) = \frac{1}{9}(AB^2 + 4\vec{AB} \cdot \vec{AC} + 4AC^2)$$

$$\text{اذن: } AD = \sqrt{\frac{7}{9}} = \frac{\sqrt{7}}{3} \text{ اذن: } AD^2 = \frac{1}{9}\left(1 + 4\left(-\frac{1}{2}\right) + 4 \times 2\right) = \frac{1}{9}(1 - 2 + 8) = \frac{7}{9}$$

(5) حسب مبرهنة المتوسط على المثلث ABC لدينا:

$$I^2 + \sqrt{2}^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}2^2 \text{ يعني } AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$$

$$\text{يعني: } 1 = 2AI^2 \text{ يعني } 3 - 2 = 2AI^2 \text{ يعني } 3 = 2AI^2 + 2$$

$$\text{يعني: } AI^2 = \frac{1}{2} \text{ يعني } AI = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

حسب مبرهنة المتوسط على المثلث ABC لدينا:

$$I^2 + 2^2 = 2BJ^2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}^2 \text{ يعني } BA^2 + BC^2 = 2BJ^2 + \frac{1}{2}AC^2$$

$$\text{يعني: } 4 = 2BJ^2 \text{ يعني } 5 - 1 = 2BJ^2 \text{ يعني } 5 = 2BJ^2 + 1$$

$$\text{يعني: } BJ^2 = 2 \text{ يعني } BJ = \sqrt{2}$$

تمرين 10: ليكن ABC مثلثا بحيث: $AC = 2$ و $BC = 3$

و $AB = \sqrt{7}$ و ليكن I منتصف القطعة $[BC]$

(1) أحسب $\cos(\hat{BAC})$ باستعمال مبرهنة الكاشي

(ب) أثبت أن: $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 1$

(ج) أحسب AI

(2) نعتبر النقطة M بحيث: $\vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{6}\vec{AC}$

(أ) أحسب $\vec{AM} \cdot \vec{AC}$

(ب) بين أن: $\vec{MB} \cdot \vec{AC} = 0$

ماذا تستنتج بالنسبة للمستقيمين (MB) و (AC)

الجواب (1): حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث ABC

$$\text{لدينا: } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos \hat{A}$$

$$\text{بالتعويض نجد: } 9 = 4 + 7 - 4\sqrt{7} \cos(\hat{A})$$

$$\text{يعني: } -2 = -4\sqrt{7} \cos(\hat{A})$$

$$\cos(\hat{A}) = \frac{2}{4\sqrt{7}} = \frac{1}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{2(\sqrt{7})^2} = \frac{\sqrt{7}}{14}$$

(1ب) لدينا: $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos \hat{A}$ يعني

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 2 \times \sqrt{7} \times \frac{\sqrt{7}}{14} = 2 \times \frac{(\sqrt{7})^2}{14} = \frac{14}{14} = 1$$

(1ج) حسب مبرهنة المتوسط: في المثلث ABC

$$\sqrt{7}^2 + 2^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}3^2 \text{ يعني } AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$$

$$\text{يعني: } 11 = 2AI^2 + \frac{9}{2} \text{ يعني } 11 = 2AI^2 + \frac{9}{2} \text{ يعني } AI^2 = \frac{13}{4} \text{ يعني } AI = \sqrt{\frac{13}{4}}$$

$$(2) \vec{AM} \cdot \vec{AC} = \left(\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{6}\vec{AC}\right) \cdot \vec{AC} = \frac{1}{3}\vec{AB} \cdot \vec{AC} + \frac{1}{6}\vec{AC} \cdot \vec{AC}$$

$$\vec{AM} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{6} \times 4 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

$$(2) \vec{MB} \cdot \vec{AC} = (\vec{MA} + \vec{AB}) \cdot \vec{AC} = \vec{MA} \cdot \vec{AC} + \vec{AB} \cdot \vec{AC}$$

$$\vec{MB} \cdot \vec{AC} = -\vec{AM} \cdot \vec{AC} + \vec{AB} \cdot \vec{AC} = -1 + 1 = 0$$

ومنه: $\overline{MB} \perp \overline{AC}$ وبالتالي $(MB) \perp (AC)$

تمرين 11: ليكن ABC مثلثا بحيث: $AB = 1$ و $BC = AC = \sqrt{2}$ و D نقطة بحيث $\overline{DB} - 2\overline{DC} = \vec{0}$ و I منتصف القطعة $[AB]$.

1. أحسب CI

2. عبر عن \overline{AD} بدلالة \overline{AB} و \overline{AC}

3. بين أن: $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{AI}$

4. استنتج أن: $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2}$ و استنتج \widehat{BAC}

5. أحسب $\overline{AB} \cdot \overline{AD}$ و استنتج طبيعة المثلث BAD

6. نعتبر النقطة M حيث: $-3\overline{MA} + 7\overline{MC} = \vec{0}$

أ. عبر عن \overline{AM} بدلالة \overline{AC} و أحسب $\overline{AC} \cdot \overline{AD}$

ب. بين أن $(MD) \perp (AC)$

الجواب (1): حسب مبرهنة المتوسط على المثلث ABC لدينا:

$$\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}I^2 \text{ يعني } BC^2 + AC^2 = 2CI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

$$\frac{7}{4} = CI^2 \text{ يعني } \frac{7}{2} = 2CI^2 \text{ يعني } 4 = 2CI^2 \text{ يعني } CI = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$CI = \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\overline{DA} + \overline{AB} - 2(\overline{DA} + \overline{AC}) = \vec{0} \text{ يعني } \overline{DB} - 2\overline{DC} = \vec{0} \text{ (2)}$$

$$-\overline{DA} + \overline{AB} - 2\overline{AC} = \vec{0} \text{ يعني } \overline{DA} + \overline{AB} - 2\overline{DA} - 2\overline{AC} = \vec{0}$$

$$\overline{AD} = -\overline{AB} + 2\overline{AC} = 2\overline{AC} - \overline{AB} \text{ يعني}$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \cdot (\overline{AI} + \overline{IC}) = \overline{AB} \cdot \overline{AI} + \overline{AB} \cdot \overline{IC} \text{ (3)}$$

لدينا I منتصف القطعة $[AB]$ و ABC متساوي الساقين في C

$$\overline{AB} \cdot \overline{IC} = 0 \text{ ومنه } \overline{AB} \perp \overline{IC} \text{ أي } (IC) \perp (AB) \text{ ومنه}$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{AI} \text{ وبالتالي}$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{AI} = \|\overline{AB}\| \cdot \|\overline{AI}\| \cos 0 = AB \cdot AI \cdot 1 = AB \cdot \frac{AB}{2} \cdot \cos 0 \text{ (4)}$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$AB \times AC \times \cos \hat{A} = \frac{1}{2} \text{ يعني } \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2} \text{ وجدنا } \cos \widehat{BAC}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ يعني } \cos \hat{A} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ يعني } 1 \times \sqrt{2} \times \cos \hat{A} = \frac{1}{2}$$

(5) وجدنا $\overline{AD} = 2\overline{AC} - \overline{AB}$ اذن:

$$\overline{AB} \cdot \overline{AD} = \overline{AB} \cdot (2\overline{AC} - \overline{AB})$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AD} = 2\overline{AB} \cdot \overline{AC} - \overline{AB} \cdot \overline{AB}$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AD} = 2\overline{AB} \cdot \overline{AC} - \overline{AB}^2 \text{ يعني}$$

$$\overline{AB} \perp \overline{AD} \text{ أي } \overline{AB} \cdot \overline{AD} = 2 \times \frac{1}{2} - AB^2 = 1 - 1 = 0$$

ومنه BAD قائم الزاوية في A

$$-3\overline{MA} + 7(\overline{MA} + \overline{AC}) = \vec{0} \text{ يعني } -3\overline{MA} + 7\overline{MC} = \vec{0} \text{ (6)}$$

$$3\overline{AM} - 7\overline{AM} + 7\overline{AC} = \vec{0} \text{ يعني } -3\overline{MA} + 7\overline{MA} + 7\overline{AC} = \vec{0}$$

$$\overline{AM} = \frac{7}{4}\overline{AC} \text{ يعني } -4\overline{AM} = -7\overline{AC}$$

حساب $\overline{AC} \cdot \overline{AD}$ ؟؟؟؟

$$\overline{AD} \cdot \overline{AC} = (2\overline{AC} - \overline{AB}) \cdot \overline{AC} = 2\overline{AC}^2 - \overline{AB} \cdot \overline{AC}$$

$$\overline{AD} \cdot \overline{AC} = 2\overline{AC}^2 - \overline{AB} \cdot \overline{AC} \text{ يعني } \overline{AD} \cdot \overline{AC} = 2\overline{AC}^2 - \overline{AB} \cdot \overline{AC}$$

$$\overline{AD} \cdot \overline{AC} = 2 \times 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \text{ يعني}$$

$$\overline{MD} \cdot \overline{AC} = (\overline{MA} + \overline{AD}) \cdot \overline{AC} = \overline{MA} \cdot \overline{AC} + \overline{AD} \cdot \overline{AC} \text{ (6)}$$

$$\overline{MD} \cdot \overline{AC} = -\overline{AM} \cdot \overline{AC} + \frac{7}{2}$$

$$\overline{MD} \perp \overline{AC} \text{ أي } \overline{MD} \cdot \overline{AC} = -\frac{7}{4} \cdot 2 + \frac{7}{2} = -\frac{7}{2} + \frac{7}{2} = 0$$

ومنه $(MD) \perp (AC)$

تمرين 12: ليكن ABC مثلث قائم الزاوية و متساوي الساقين رأسه B

بحيث: $AB = \sqrt{2}$

ننشئ خارجه المثلث المتساوي الأضلاع ABD (أنظر الشكل)

1) أحسب: $\overline{BC} \cdot \overline{BD}$ و $\overline{BA} \cdot \overline{BD}$

2) أحسب: DC و AC

3) بين أن $\overline{AC} \cdot \overline{AD} = 1 - \sqrt{3}$

4) تحقق من أن $\widehat{DAC} = \frac{7\pi}{12}$

5) استنتج أن $\cos \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

الجواب (1):

$$\overline{BA} \cdot \overline{BD} = \|\overline{BA}\| \cdot \|\overline{BD}\| \cos \hat{ABD} = AB \cdot BD \cdot \cos \frac{\pi}{3} = (\sqrt{2})^2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\overline{BC} \cdot \overline{BD} = \|\overline{BC}\| \cdot \|\overline{BD}\| \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \right) = (\sqrt{2})^2 \times -\sin \left(\frac{\pi}{3} \right) = -2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$$

2) حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة فان: $AC^2 = BC^2 + AB^2$

يعني $AC^2 = \sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2$ يعني $AC^2 = 4$ يعني $AC = 2$

حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث BCD لدينا:

$$DC^2 = BC^2 + BD^2 - 2BC \times BD \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$DC^2 = 2 + 2 - 2 \times 2 \times -\sin \left(\frac{\pi}{3} \right)$$

$$DC^2 = 4 + 4 \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) = 4 + 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4 + 2\sqrt{3} \text{ يعني}$$

$$DC = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$$

3) حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث ACD لدينا:

$$DC^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC \times AD \cos(\alpha)$$

$$DC^2 = AC^2 + AD^2 - 2\overline{AC} \times \overline{AD}$$

$$(\sqrt{4 + 2\sqrt{3}})^2 = 4 + 2 - 2\overline{AC} \times \overline{AD}$$

$$4 + 2\sqrt{3} = 4 + 2 - 2\overline{AC} \times \overline{AD} \text{ يعني}$$

$$\overline{AC} \times \overline{AD} = 1 - \sqrt{3} \text{ يعني}$$

$$\widehat{DAC} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12} \text{ (4)}$$

5) وجدنا: $\overline{AC} \times \overline{AD} = 1 - \sqrt{3}$

$$AC \times AD \times \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \right) = 1 - \sqrt{3} \text{ يعني}$$

$$2 \times \sqrt{2} \times \cos \left(\frac{7\pi}{12} \right) = 1 - \sqrt{3} \text{ يعني}$$

$$\cos \left(\frac{7\pi}{12} \right) = \frac{1 - \sqrt{3}}{2 \times \sqrt{2}} = \frac{(1 - \sqrt{3}) \times \sqrt{2}}{2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

تمرين 13: ليكن ABC مثلث متساوي الساقين رأسه A بحيث:

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 16$$

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{1}{4}$$

و I نقطة بحيث $\overline{BI} = \frac{3}{4}\overline{BA}$ و

J منتصف القطعة $[BC]$. وليكن

(Δ) المستقيم المار من I

والعمودي على المستقيم (AB)

ولتكن نقطة E بحيث: $E \in (\Delta)$

(1) أرسم شكلا تقريبا

(2) بين أن: $AB = 8$ وأحسب BC

(3) أحسب: $\overline{BI} \cdot \overline{BA}$

(4) بين أن: $\overline{EB} \cdot \overline{AB} = 48$

(5) أحسب: AJ

(الجواب: 1)

(2) لدينا $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 16$ يعني $AB \times AC \times \cos \hat{A} = 16$

يعني $AB^2 \times \frac{1}{4} = 16$ يعني $AB \times AB \times \cos \hat{A} = 16$

يعني $AB^2 = 64$ يعني $AB = 8$

(ب) حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث ABC

لدينا: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos \hat{A}$

بالتعويض نجد: $BC^2 = 64 + 64 - 2 \times 64 \times \frac{1}{4}$

يعني: $BC^2 = 96$ يعني $BC = \sqrt{96}$

(3) $\overline{BI} \cdot \overline{BA} = \frac{3}{4}\overline{BA} \cdot \overline{BA} = \frac{3}{4}\overline{BA}^2 = \frac{3}{4}BA^2 = \frac{3}{4} \times 64 = 48$

(4) $\overline{EB} \cdot \overline{AB} = (\overline{EI} + \overline{IB}) \cdot \overline{AB} = \overline{EI} \cdot \overline{AB} + \overline{IB} \cdot \overline{AB}$

لدينا $\overline{EI} \cdot \overline{AB} = 0$ لأن $\overline{EI} \perp \overline{AB}$

ومنه: $\overline{EB} \cdot \overline{AB} = \overline{IB} \cdot \overline{AB} = (-\overline{BI}) \cdot (-\overline{BA}) = \overline{BI} \cdot \overline{BA} = 48$

(5) حسب مبرهنة المتوسط: في المثلث ABC

$8^2 + 8^2 = 2AJ^2 + \frac{1}{2}\sqrt{96}^2$ يعني $AB^2 + AC^2 = 2AJ^2 + \frac{1}{2}BC^2$

يعني: $128 = 2AJ^2 + 48$ يعني: $80 = 2AJ^2$ يعني: $40 = AJ^2$

يعني: $AJ = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

تمرين 13 BIS: ليكن ABC مثلث متساوي الساقين رأسه B

بحيث: $\overline{BA} \cdot \overline{BC} = 12$ و $\cos(\widehat{ABC}) = \frac{1}{3}$

و J نقطة بحيث $\overline{BJ} = \frac{5}{4}\overline{BA}$ و I منتصف القطعة $[AC]$. وليكن

(Δ) المستقيم المار من J والعمودي على المستقيم (AB)

ولتكن نقطة بحيث: $M \in (\Delta)$

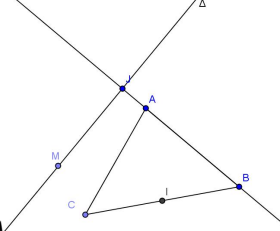
1. أرسم شكلا تقريبا

2. بين أن: $AB = 6$ وأحسب AC

3. أحسب: $\overline{BJ} \cdot \overline{BA}$

4. بين أن: $\overline{MB} \cdot \overline{AB} = 45$

5. أحسب: BI



(الجواب: 1)

(2) لدينا $\overline{BA} \cdot \overline{BC} = 12$ يعني $\|\overline{BA}\| \times \|\overline{BC}\| \times \cos \hat{B} = 12$

يعني $BA \times BC \times \cos \hat{B} = 12$ يعني $AB^2 \times \frac{1}{3} = 12$

يعني $AB^2 = 36$ يعني $AB = 6$

(ب) حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث ABC

لدينا: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \cos \hat{B}$

بالتعويض نجد: $AC^2 = 36 + 36 - 2 \times 36 \times \frac{1}{3}$

يعني: $AC^2 = 54$ يعني $AC = \sqrt{54}$

(3) $\overline{BJ} \cdot \overline{BA} = \frac{5}{4}\overline{BA} \cdot \overline{BA} = \frac{5}{4}\overline{BA}^2 = \frac{5}{4}BA^2 = \frac{5}{4} \times 36 = 45$

(4) $\overline{MB} \cdot \overline{AB} = (\overline{MJ} + \overline{JB}) \cdot \overline{AB} = \overline{MJ} \cdot \overline{AB} + \overline{JB} \cdot \overline{AB}$

لدينا $\overline{MJ} \cdot \overline{AB} = 0$ لأن $\overline{MJ} \perp \overline{AB}$

ومنه: $\overline{MB} \cdot \overline{AB} = \overline{JB} \cdot \overline{AB} = (-\overline{BJ}) \cdot (-\overline{BA}) = \overline{BJ} \cdot \overline{BA} = 45$

(5) حسب مبرهنة المتوسط: في المثلث ABC

$6^2 + 6^2 = 2BI^2 + \frac{1}{2}\sqrt{54}^2$ يعني $AB^2 + BC^2 = 2BI^2 + \frac{1}{2}AC^2$

يعني: $72 = 2BI^2 + 27$ يعني: $45 = 2BI^2$ يعني: $BI^2 = \frac{45}{2}$ يعني: $BI = \sqrt{\frac{45}{2}}$

تمرين للبحث: يكن ABC مثلثا بحيث: $AB = 1$ و $AC = 3$

و $\widehat{CAB} = \frac{2\pi}{3}$ و I منتصف القطعة $[AB]$.

(1) بين أن $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = -\frac{3}{2}$

(2) لتكن النقطة E بحيث: $\overline{BE} = \frac{1}{5}\overline{BC}$

(أ) بين أن $\overline{AE} = \frac{4}{5}\overline{AB} + \frac{1}{5}\overline{AC}$ ثم أحسب $\overline{AB} \cdot \overline{AE}$

(ب) بين أن $(AB) \perp (IE)$

انتهى الدرس

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.
c'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

ملاحظات عامة حول الدرس