

ملخص درس الحساب العددي

I. التناسبية والنسب المئوية والسلم

تعريف: a و b و c و d أعداد حقيقية بحيث $bd \neq 0$
نقول إن الأعداد a و b متناسبة مع c و d على التوالي إذا وفقط

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \quad \text{إذا كان:}$$

مثال 1: اشترت خديجة سروالا و قميصا بمجموع قدره 105dh اذا علمت أن ثمن السروال و القميص متناسبان على التوالي مع الأعداد 6 و 9 فاحسب ثمن القميص و السروال

الجواب: ليكن x ثمن السروال و y ثمن القميص
بما أن: ثمن السروال و القميص متناسبان على التوالي مع الأعداد 9

$$\frac{x}{9} = \frac{y}{6} \quad \text{اذن: } \frac{x+y}{15} = \frac{105}{15} = 7$$

$$\text{اذن: } \frac{x}{9} = 7 \quad \text{و} \quad \frac{y}{6} = 7 \quad \text{يعني } x = 63 \quad \text{و} \quad y = 42$$

مثال 2: يتكون قسم من 40 تلميذا منهم 15 من الإناث
حدد النسبة المئوية للإناث و الذكور في هذا القسم

$$\text{الجواب: نسبة الإناث: } t\% = \left(\frac{15}{40}\right) \times 100 = 0.375 \times 100 = 37.5\%$$

$$\text{نسبة الذكور: } t\% = \left(\frac{25}{40}\right) \times 100 = 0.625 \times 100 = 62.5\%$$

مثال 3: ارتفع ثمن البنزين من 5.20 DH الى 5.98 DH للتر الواحد
ما نسبة المئوية الزيادة؟

$$\text{الجواب: } t\% = \left(\frac{5.98-5.20}{5.20}\right) \times 100 = \frac{0.98}{5.20} \times 100 = 0.15 \times 100 = 15\%$$

مثال 4: انخفض ثمن آلة حاسبة من 150 DH الى 135 DH
ما نسبة المئوية للتخفيض؟

$$\text{الجواب: } t\% = \left(\frac{150-135}{150}\right) \times 100 = \frac{15}{150} \times 100 = 0.1 \times 100 = 10\%$$

مثال 5: يبلغ ثمن حذاء رياضي 170DH و ثمن بذلة رياضية 230DH و زيد في ثمن الحذاء بنسبة 6% و خفض في ثمن البذلة الرياضية بنسبة 8% أحسب الثمن الجديد للحذاء و البذلة
الجواب: ثمن الحذاء الرياضي بعد الزيادة هو:

$$A = 170 + \left(\frac{6}{100}\right) \times 170 = 170 + 10.2 = 182.2 \text{ DH}$$

ثمن البذلة الرياضية بعد التخفيض هي:

$$B = 230 - \left(\frac{8}{100}\right) \times 230 = 230 - 18.4 = 211.6 \text{ DH}$$

مثال 6: اذا علمت أن طول طريق سيار على خريطة ذات السلم $\frac{1}{1000000}$ هو 0.1m ما الطول الحقيقي للطريق السيار؟

الجواب: الطول الحقيقي للطريق السيار هو:

$$A = 0.1 \times 1000000 = 100000 \text{ m} = 100 \text{ km}$$

II. المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

تعريف: ليكن a و b عددين حقيقيين كل معادلة على الشكل $ax + b = 0$ تسمى معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد، حيث x هو المجهول.

أمثلة: حل في \mathbb{R} المعادلات التالية:

$$(1) \quad -2x + 22 = 0 \quad (2) \quad 3(2x + 5) = 6x - 1$$

$$(3) \quad 4(x - 2) = 6x - 2(x + 4) \quad (4) \quad 9x^2 - 16 = 0$$

الجواب: (1) $-2x + 22 = 0$ يعني $-2x = -22$
يعني $x = 11$ ومنه: $S = \{11\}$ وتسمى مجموعة حلول المعادلة

$$(2) \quad 3(2x + 5) = 6x - 1 \quad \text{يعني} \quad 6x + 15 = 6x - 1$$

$$\text{يعني} \quad 6x - 6x = -1 - 15 \quad \text{يعني} \quad 0x = -16$$

وهذا غير ممكن ومنه: $S = \emptyset$

$$(3) \quad 4(x - 2) = 6x - 2(x + 4) \quad \text{يعني} \quad 4x - 8 = 6x - 2x - 8$$

$$\text{يعني} \quad 4x - 4x + 8 - 8 = 0 \quad \text{يعني} \quad 0 = 0$$

ومنه: كل عدد حقيقي هو حل لهذه المعادلة وبالتالي: $S = \mathbb{R}$

(4) أمامنا معادلة من الدرجة الثانية

$$(3x)^2 - 4^2 = 0 \quad \text{يعني} \quad 9x^2 - 16 = 0$$

$$\text{يعني} \quad (3x - 4)(3x + 4) = 0 \quad \text{يعني} \quad 3x + 4 = 0 \quad \text{أو} \quad 3x - 4 = 0$$

$$\text{يعني} \quad 3x = -4 \quad \text{أو} \quad 3x = 4 \quad \text{يعني} \quad x = \frac{-4}{3} \quad \text{أو} \quad x = \frac{4}{3}$$

$$\text{ومنه: } S = \left\{ \frac{-4}{3}, \frac{4}{3} \right\}$$

III. المترجمات من الدرجة الأولى بمجهول واحد:

تعريف: ليكن a و b عددين حقيقيين كل مترجمة على الشكل $ax + b \geq 0$ أو $ax + b > 0$ أو $ax + b \leq 0$ أو $ax + b < 0$ تسمى مترجمة من الدرجة الأولى بمجهول واحد حيث x هو المجهول.

إشارة الحدانية $ax + b$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	إشارة a	0 عكس إشارة a	إشارة a

مثال 1: حل في مجموعة الأعداد الحقيقية المترجمات التالية:

$$(1) \quad -2x + 12 > 0 \quad (2) \quad 5x - 15 \leq 0$$

$$\text{أجوبة: (1)} \quad -2x + 12 > 0 \quad \text{يكافئ} \quad -2x + 12 = 0 \quad \text{يكافئ} \quad x = 6$$

و بما أن: $a = -2$ و $a < 0$ فإن جدول الإشارة هو كالتالي:

x	$-\infty$	6	$+\infty$
$-2x + 12$		0	-
			+

ومنه فإن: $S =]-\infty; 6[$

$$(2) \quad 5x - 15 \leq 0 \quad \text{يكافئ} \quad 5x - 15 = 0$$

و بما أن: $a = 5$ و $a > 0$ فإن جدول الإشارة هو كالتالي:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$5x - 15 = 0$		-	0
			+

ومنه فإن: $S =]-\infty; 6[$

مثال 2: حل في مجموعة الأعداد الحقيقية المترجمة التالية:

$$4x^2 - 9 \geq 0$$

$$\text{الجواب: } 4x^2 - 9 = 0 \quad \text{يعني} \quad (2x)^2 - 3^2 = 0$$

$$(2x - 3)(2x + 3) = 0$$

$$\text{يعني} \quad 2x + 3 = 0 \quad \text{أو} \quad 2x - 3 = 0 \quad \text{يعني} \quad x = \frac{-3}{2} \quad \text{أو} \quad x = \frac{3}{2}$$

الطريقة: في جدول نعطي إشارة كل عامل على الشكل $ax + b$ ثم استنتج إشارة الجداء أو الخارج مع ترتيب تزايد للقيم التي ينعدم فيها كل عامل.

2) حل المتراجحة : $S =]-\infty, \frac{1}{2}] \cup [1, +\infty[$

مثال 2: أدرس إشارة الحدودية $P(x) = -2x^2 + 4x - 2$

وحل في \mathbb{R} المتراجحة : $-2x^2 + 4x - 2 \leq 0$

أجوبة (1): $a = -2$ $P(x) = -2x^2 + 4x - 2$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4 \times (-2) \times (-2) = 16 - 16 = 0$$

بما أن $\Delta = 0$ فان هذه الحدودية لها جذر وحيد هو: $x_1 = \frac{-(-4)}{2 \times (-2)} = 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$P(x) = -2x^2 + 4x - 2$	-	0	-

2) حل المتراجحة : $S = \mathbb{R}$

مثال 3: أدرس إشارة الحدودية $P(x) = 3x^2 + 6x + 5$

وحل في \mathbb{R} المتراجحة : $3x^2 + 6x + 5 < 0$

أجوبة (1): $a = 3 > 0$ $P(x) = 3x^2 + 6x + 5$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (6)^2 - 4 \times 3 \times 5 = 36 - 60 = -24 < 0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x) = 3x^2 + 6x + 5$		+

2) حل المتراجحة : $S = \emptyset$

VI. النظمات:

(1) طريقة التعويض:

$$\begin{cases} 4x + y = 10 \\ -5x + 2y = -19 \end{cases} \text{ مثال: حل في } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ النظمة التالية:}$$

الجواب: نبحث عن y في المعادلة الأولى مثلا

$$y = 10 - 4x \text{ يعني } 4x + y = 10$$

ونعوض y بقيمتها في المعادلة الثانية

$$-5x + 2(10 - 4x) = -19 \text{ يعني } -5x + 2y = -19$$

$$\text{يعني } -5x - 8x = -19 - 20 \text{ يعني } -13x = -39 \text{ يعني } x = 3$$

ونعوض x ب 3 في المعادلة $y = 10 - 4x$ فنجد $y = -2$

$$\text{و منه: } S = \{(3, -2)\}$$

(2) طريقة التأليفة الخطية

$$\begin{cases} 4x + y = 10 \\ -5x + 2y = -19 \end{cases} \text{ مثال: حل في } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ النظمة التالية:}$$

الجواب: نضرب المعادلة الأولى في العدد (-2) فنحصل على:

$$\begin{cases} -8x - 2y = -20 \\ -5x + 2y = -19 \end{cases} \text{ وبجمع المعادلتين طرف لطرف نجد:}$$

$$-13x = -39 \text{ يعني } x = 3$$

ونعوض x ب 3 في المعادلة $4x + y = 10$ فنجد $y = -2$

$$\text{و منه: } S = \{(3, -2)\}$$

(3) طريقة المحددة:

$$(1) \begin{cases} x + 2y = 4 \\ -x + 4y = 2 \end{cases} \text{ مثال: طريقة المحددة: حل في } \mathbb{R}^2 \text{ النظمة:}$$

$$\text{الجواب: } \text{محددة النظمة (1) هي: } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \text{ و منه النظمة}$$

$$\text{تقبل حلا وحيدا: هو } x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{12}{6} = 2 \text{ و } y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{6}{6} = 1$$

$$\text{و منه: } S = \{(2, 1)\}$$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$2x+3$	-	0	+	+
$2x-3$	-	-	0	+
$2x-3)(2x+3)$	+	0	-	+

و منه فان : $S =]-\infty; -\frac{3}{2}] \cup [\frac{3}{2}; +\infty[$

IV. المعادلات من الدرجة الثانية بمجهول واحد:

لحل المعادلة : $ax^2 + bx + c = 0$ نحسب مميز المعادلة

$$\Delta = b^2 - 4 \times a \times c$$

✓ إذا كان $\Delta < 0$ فان المعادلة ليس لها حل في \mathbb{R} .

✓ إذا كان $\Delta = 0$ فان المعادلة تقبل حلا وحيدا هو: $-\frac{b}{2a}$

✓ إذا كان $\Delta > 0$ فان المعادلة تقبل حلين هما: $\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

نرمز لمجموعة حلول المعادلة بالرمز S .

مثال 1: المعادلة $3x^2 + x + 2 = 0$ ليس لها حلا في \mathbb{R} لأن

$$\Delta < 0 \quad (\Delta = 1 - 4 \times 3 \times 2 = -23)$$

و بالتالي مجموعة حلولها هي $S = \emptyset$.

مثال 2: المعادلة $x^2 - 10x + 25 = 0$ لها حل وحيد لأن

$$\Delta = 0 \quad (\Delta = 10^2 - 4 \times 25 = 0)$$

و بالتالي مجموعة حلولها هي $S = \{5\}$.

مثال 3: نعتبر المعادلة $x^2 - 3x + 2 = 0$ لدينا $\Delta = 9 - 4 \times 2 = 1$

و $\Delta > 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_1 = \frac{3-1}{2} = 1 \text{ و } x_2 = \frac{3+1}{2} = 2 \text{ و منه } S = \{1; 2\}$$

V. إشارة ثلاثية الحدود : $ax^2 + bx + c$

الحالة 1: إذا كان $\Delta > 0$ و x_1 و x_2 هما جذري ثلاثية الحدود فان:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$P(x) = ax^2 + bx + c$	إشارة a	0	عكس إشارة a	إشارة a

الحالة 2: إذا كان $\Delta = 0$ و x_1 هو الجذر الوحيد المزدوج فان:

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
$P(x) = ax^2 + bx + c$	إشارة a	0	إشارة a

الحالة 3: إذا كان $\Delta < 0$ فان إشارة $P(x)$ هي إشارة العدد a

فان:

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x) = ax^2 + bx + c$	إشارة a	

مثال 1: أدرس إشارة الحدودية $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$

وحل في \mathbb{R} المتراجحة : $2x^2 - 3x + 1 \geq 0$

أجوبة (1): $a = 2$ $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 9 - 8 = 1 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فان للحدودية جذرين هما:

$$x_1 = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \times 2} = \frac{3+1}{4} = 1 \text{ و } x_2 = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{4} = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2} \text{ و منه:}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$P(x)$	+	0	-	+