مستوى : السنة الثانية من سلك الباكالوريا
شعبة العلوم التجريبية
- مسلك علوم الحياة و الأرض
- مسلك العلوم الفيزيائية
- مسلك العلوم الزراعية

مذكرة رقم 2 في درس الاشتقاق

محتوى البرنامج
- العدد المشتق-الدالة المشتقة تذكير و إضافات
- مشتقة بعض الدوال الاعتيادية
- العمليات على الدوال المشتقة:تذكير
- مشتقة مركب دالتين والدالة العكسية

القدرات المنتظرة
- حساب مشتقات الدوال الاعتيادية
- تحديد رتابة دالة انطلاقا من إشارة مشتقتها .
- تحديد إشارة دالة انطلاقا من جدول تغيراتها أو من تمثيلها المبياني
- الحل المبياني لمعادلة من الشكل : $f(x)=g(x)$ و متراجحات من الشكل : $f(x)\le g(x)$
- تحديد مشتقة و رتابة الدالة العكسية لدالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال و تمثيلها المبياني
- حل مسائل تطبيقية حول القيم الدنوية و القيم القصوية
- دراسة وتمثيل دوال لا جذرية و دوال مثلثية .

I. تذكير و إضافات:

1. العدد المشتق

تعريف : لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و a عنصرا من I

نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق في النقطة a إذا وجد عدد حقيقي l بحيث : $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$

يسمى العدد l العدد المشتق للدالة في النقطة a و نرمز له بالرمز : $f'(a)$

ونكتب : $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$

ملاحظة : الكتابة : $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$

تكافئ الكتابة : $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=5x^2$

باستعمال التعريف أدرس اشتقاق الدالة f عند $x_0=1$

<u>الجواب :</u> $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{5x^2-5}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{5(x^2-1)}{x-1}$

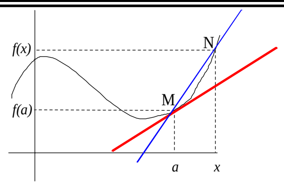
$=\lim_{x\to1}\frac{5(x^2-1^2)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{5(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to1}5(x+1)=5\times2=10$

ومنه f قابلة للاشتقاق عند : $x_0=1$

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=10=f'(1)$ و هو العدد المشتق عند $x_0=1$

2. التأويل الهندسي للعدد المشتق – معادلة مماس لمنحنى دالة في نقطة

تعريف : لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في نقطة a و (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.



المستقيم (Δ) المار من النقطة $M(a;f(a))$ و الذي معامله الموجه هو $f'(a)$ يسمى المماس للمنحنى (C_f) في النقطة M

<u>خاصية</u> : لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في نقطة a

معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) في النقطة $M(a;f(a))$ هي :

$(\Delta)\ :\ y=f(a)+f'(a)(x-a)$

<u>تمرين1:</u> نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=x^2-2x+1$

1. باستعمال التعريف بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0=2$.
2. حدد معادلة المماس للمنحنى الممثل للدالة f عند $x_0=2$.

<u>الجواب: 1)</u> $f(2)=2^2-2\times2+1=1$

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x^2-2x+1-1}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x^2-2x}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}\frac{x(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to2}x=2$ ومنه f قابلة للاشتقاق عند : $x_0=1$

$2=f'(2)$ و هو العدد المشتق عند $x_0=2$

(2 $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

$y=2x-3\Leftrightarrow y=1+2(x-2)\Leftrightarrow y=f(2)+f'(2)(x-2)$

<u>تمرين2:</u>الاشتقاق على اليمين ـ الاشتقاق على اليسار

نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=x^3+|x|$

1. أحسب $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ (**قابلية اشتقاق الدالة** f **على اليمين** عند $x_0=0$)

2. أحسب $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ (**قابلية اشتقاق الدالة** f **على اليسارعند** $x_0=0$)

3. هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0=0$ ؟

4. حدد معادلة لنصف مماس لمنحنى للدالة f على اليمين عند $x_0=0$.

5. حدد معادلة لنصف مماس لمنحنى للدالة f على اليسار عند $x_0=0$.

6. كيف نسمي النقطة $A(0,f(0))$ ؟

<u>الجواب :</u> $\begin{cases} f(x)=x^3+x; x\geq 0 \\ f(x)=x^3-x; x\leq 0\end{cases}$ و $f(0)=0^3+|0|=0$

1) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^3+x-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x(x^2+1)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}x^2+1=1$

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0=0$ و $1=f'_d(0)$

وهو العدد المشتق على اليمين عند $x_0=0$

2) $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^3-x-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x(x^2-1)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}x^2-1=-1$

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0=0$ و $-1=f'_g(0)$

وهو العدد المشتق على اليسار عند $x_0=0$

3) f قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار عند $x_0=0$ ولكن : $f'_d(0)\neq f'_g(0)$

ومنه : f غير قابلة للاشتقاق عند $x_0=0$

4) معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليمين عند $x_0=0$.

$y=f(x_0)+f'_d(x_0)(x-x_0)$

$(\Delta_d): y=x \Leftrightarrow y=0+1(x-0)\Leftrightarrow y=f(0)+f'_d(0)(x-0)$

5) معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليسار عند $x_0=0$.

$y=f(x_0)+f'_g(x_0)(x-x_0)$

$(\Delta_g): y=-x \Leftrightarrow y=0-1(x-0)\Leftrightarrow y=f(0)+f'_g(0)(x-0)$

6) لدينا $f'_d(0)\neq f'_g(0)$ النقطة : $A(0;f(0))$ تسمى نقطة مزواة

خاصية : لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و a عنصرا من I

f قابلة للاشتقاق على النقطة a تكافئ f قابلة للاشتقاق على اليمين في النقطة a و f قابلة للاشتقاق على اليسار في النقطة a و $f'_g(a)=f'_d(a)$

<u>تمرين3:</u> نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=|x^2-1|$

1. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين عند $x_0=1$
2. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار عند $x_0=1$
3. هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0=1$ ؟
4. حدد معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليمين عند $x_0=1$.
5. حدد معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليسار عند $x_0=1$.
6. كيف نسمي النقطة $A(1,f(1))$ ؟

<u>الجواب :</u> $f(x)=|x^2-1|$ ندرس اشارة : x^2-1 :

$x^2-1=0\Leftrightarrow(x-1)(x+1)=0\Leftrightarrow x=1$ أو $x=-1$

ومنه : $\begin{cases} f(x)=x^2-1; x\in]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[\\ f(x)=-(x^2-1); x\in[-1;1]\end{cases}$ و $f(1)=|1^2-1|=0$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

1) $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x^2-1-0}{x-1}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}x+1=2$

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0=1$ و $2=f'_d(1)$

وهو العدد المشتق على اليمين عند $x_0=1$

2) $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{-(x^2-1)-0}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{-(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}-(x+1)=-2$

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0=1$ و $-2=f'_d(1)$

وهو العدد المشتق على اليسار عند $x_0=1$

3) f قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار عند $x_0=1$

ولكن : $f'_d(1)\neq f'_g(1)$

ومنه : f غير قابلة للاشتقاق عند $x_0=1$

4) معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليمين عند $x_0=1$.

$y=f(x_0)+f'_d(x_0)(x-x_0)$

$(\Delta_d): y=2x-4 \Leftrightarrow y=0+2(x-2)\Leftrightarrow y=f(1)+f'_d(1)(x-1)$

5) معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليسار عند $x_0=0$.

$y=f(x_0)+f'_g(x_0)(x-x_0)$

$(\Delta_g): y=-2x+4 \Leftrightarrow y=0-2(x-2)\Leftrightarrow y=f(1)+f'_g(1)(x-1)$

6) لدينا $f'_d(1)\neq f'_g(1)$ النقطة : $A(1;f(1))$ تسمى نقطة مزواة

<u>تمرين4 :</u>

نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=x^2\sqrt{1+x}$

1. حدد مجموعة تعريف الدالة f
2. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين عند $x_0=-1$
3. وأعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها.

الجواب :

1) $D_f=[-1,+\infty[$

2) $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x^2\sqrt{1+x}-0}{x+1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x^2\sqrt{1+x}}{x+1}$

$=\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{x^2(\sqrt{1+x})^2}{(x+1)\sqrt{1+x}}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x^2(1+x)}{(x+1)\sqrt{1+x}}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x^2}{\sqrt{1+x}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

ومنه f غير قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0=-1$

3) مبيانيا نقول ان منحنى الدالة f يقبل نصف مماس يوازي محور الأراتيب في النقطة : $A(-1;f(-1))$ وموجه نحو الأعلى

خاصية: إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق في نقطة x_0 فإنها متصلة في x_0 .

<u>تمرين5 :</u>

نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=|x|\sqrt{1-x}$

1. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين وعلى اليسار عند $x_0=0$ وأعط تأويلا هندسيا للنتائج المحصل عليها
2. هل الدالة f متصلة عند $x_0=0$ ؟

3. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار عند $x_0=1$ وأعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها.

II. جدول للدوال المشتقة لدوال اعتيادية و العمليات

(أنظر الجدول1 و 2)

أمثلة: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=2$ 2) $f(x)=3x-5$ 3) $f(x)=x^{10}$
4) $f(x)=4x^3-\frac{1}{2}x^2-1$ 5) $f(x)=\frac{5}{x}$ 6) $f(x)=6\sqrt{x}-4$
7) $f(x)=6x^4-\cos x+3\sin x$ 8) $f(x)=\cos(7x+2)$
9) $f(x)=\frac{4}{5}\sin(5x+4)$ 10) $f(x)=3\tan x-1$
11) $f(x)=x\cos x$ 12) $f(x)=\frac{1}{2x+1}$
13) $f(x)=\frac{3x-1}{x+2}$ 14) $f(x)=(3x+4)^3$ 15) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

أجوبة: 1) $f'(x)=(2)'=0$ 2) $f'(x)=(3x-5)'=3$
3) $f'(x)=(x^{10})'=10x^{10-1}=10x^9$
4) $f'(x)=\left(4x^3-\frac{1}{2}x^2-1\right)'=4\times3x^{3-1}-\frac{1}{2}\times2x-0=12x^2-x$
5) $f'(x)=\left(\frac{5}{x}\right)'=\left(5\times\frac{1}{x}\right)'=5\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{-5}{x^2}$
6) $f'(x)=(6\sqrt{x}-4)'=6\times\frac{1}{2\sqrt{x}}-0=\frac{3}{\sqrt{x}}=\frac{3\sqrt{x}}{x}$
7) $f'(x)=(6x^4-\cos x+3\sin x)'=6\times4x^3+\sin x+3\cos x=24x^3+\sin x+3\cos x$
8) $f'(x)=\cos(7x+2)'=-7\times\sin(7x+2)$
9) $f'(x)=\frac{4}{5}\sin(5x+4)'=5\frac{4}{5}\times\cos(5x+4)=4\times\cos(5x+4)$
10) $f'(x)=(3\tan x-1)'=3\times(1+\tan^2x)-0=3\times(1+\tan^2x)$
11) نستعمل القاعدة التالية: $(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$
$f'(x)=(x\times\cos x)'=x'\times\cos x+x\times\cos' x=1\times\cos x-x\times\sin x=\cos x-x\sin x$
12) نستعمل القاعدة التالية: $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$
$f'(x)=\left(\frac{1}{2x+1}\right)'=-\frac{(2x+1)'}{(2x+1)^2}=-\frac{2}{(2x+1)^2}$
13) $f(x)=\frac{3x-1}{x+2}$ نستعمل القاعدة التالية: $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$
$f'(x)=\left(\frac{3x-1}{x+2}\right)'=\frac{(3x-1)'(x+2)-(3x-1)(x+2)'}{(x+2)^2}=\frac{3(x+2)-1\times(3x-1)}{(x+2)^2}=\frac{7}{(x+2)^2}$
14) $f(x)=(3x+4)^3$ نستعمل القاعدة التالية: $(u^n)'=nu^{n-1}\times u'$
$f'(x)=\left((3x+4)^3\right)'=3\times(3x+4)^{3-1}\times(3x+4)'=3\times3\times(3x+4)^{3-1}=9(3x+4)^2$

تمرين6: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=11$ 2) $f(x)=7x+15$ 3) $f(x)=2x^3$
4) $f(x)=4x^4-\frac{1}{3}x^3-x+1$ 5) $f(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4-4x-6$
6) $f(x)=\frac{3}{x}$ 7) $f(x)=4\sqrt{x}-1$ 8) $f(x)=\cos2x+3\sin3x$
9) $f(x)=(3x^2+2)(7x+1)$ 10) $f(x)=\frac{1}{5x+7}$
11) $f(x)=\sqrt{x^2+8x}$ 12) $f(x)=\frac{7x}{x^3+1}$ 13) $f(x)=\frac{1}{\sin x}$
14) $f(x)=\frac{4x-3}{2x-1}$ 15) $f(x)=(2x-1)^7$

أجوبة: 1) $f'(x)=(11)'=0$ 2) $f'(x)=(7x+15)'=7$
3) $f'(x)=(2x^3)'=2\times3x^{3-1}=6x^2$
4) $f'(x)=\left(4x^4-\frac{1}{3}x^3-x+1\right)'=4\times4x^{4-1}-\frac{1}{3}\times3x^2-1+0=16x^3-x^2-1$
5) $f'(x)=\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4-4x-6\right)'=\frac{1}{5}\times5x^{5-1}-\frac{1}{4}\times4x^3-4+0=x^4-x^3-4$
6) $f'(x)=\left(\frac{3}{x}\right)'=\left(3\times\frac{1}{x}\right)'=3\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{-3}{x^2}$
7) $f'(x)=(4\sqrt{x}-1)'=4\times\frac{1}{2\sqrt{x}}-0=\frac{2}{\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}}{x}$
8) $f'(x)=(\cos2x+3\sin3x)'=-2\sin2x+3\times3\cos3x=-2\sin2x+9\cos3x$
9) $f(x)=(3x^2+2)(7x+1)$
نستعمل القاعدة التالية: $(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$
$f'(x)=\left((3x^2+2)\times(7x+1)\right)'=(3x^2+2)'\times(7x+1)+(3x^2+2)\times(7x+1)'$
$f'(x)=6x\times(7x+1)+7(3x^2+2)=42x^2+6x+21x^2+14=63x^2+6x+14$
10) نستعمل القاعدة التالية: $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$
$f'(x)=\left(\frac{1}{5x+7}\right)'=-\frac{(5x+7)'}{(5x+7)^2}=-\frac{5}{(5x+7)^2}$
11) $f(x)=\sqrt{x^2+8x}$ نستعمل القاعدة التالية: $(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$f'(x)=\left(\sqrt{x^2+8x}\right)'=\frac{(x^2+8x)'}{2\sqrt{x^2+8x}}=\frac{2x+8}{2\sqrt{x^2+8x}}=\frac{x+4}{\sqrt{x^2+8x}}$
12) $f(x)=\frac{7x}{x^3+1}$ نستعمل القاعدة التالية: $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$
$f'(x)=\left(\frac{7x}{x^3+1}\right)'=\frac{(7x)'(x^3+1)-7x(x^3+1)'}{(x^3+1)^2}=\frac{7(x^3+1)-7x\times3x^2}{(x^3+1)^2}$
$f'(x)=\frac{7x^3+7-21x^3}{(x^3+1)^2}=\frac{7-14x^3}{(x^3+1)^2}$
13) $f(x)=\frac{1}{\sin x}$ نستعمل القاعدة التالية: $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$
$f'(x)=\left(\frac{1}{\sin x}\right)'=-\frac{(\sin x)'}{(\sin x)^2}=-\frac{\cos x'}{(\sin x)^2}$
14) $f(x)=\frac{4x-3}{2x-1}$ نستعمل القاعدة التالية: $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$
$f'(x)=\left(\frac{4x-3}{2x-1}\right)'=\frac{(4x-3)'(2x-1)-(4x-3)(2x-1)'}{(2x-1)^2}=\frac{4(2x-1)-2\times(4x-3)}{(2x-1)^2}$
$f'(x)=\frac{4(2x-1)-2\times(4x-3)}{(2x-1)^2}=\frac{8x-4-8x+6}{(2x-1)^2}=\frac{2}{(2x-1)^2}$

15) $f(x)=(2x-1)^7$ نستعمل القاعدة التالية : $(u^n)'=nu^{n-1}\times u'$

$$f'(x)=\left((2x-1)^7\right)'=7\times(2x-1)^{7-1}\times(2x-1)'=14(2x-1)^6$$

III. مشتقة مركب دالتين و مشتقة الدالة العكسية:

خاصية1: لتكن f و g دالتين معرفتين على التوالي على مجالين I و J بحيث: $f(I)\subset J$, و x_0 عنصر من I.

▪ إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق في x_0 , و g قابلة للاشتقاق في $f(x_0)$, فان الدالة gof قابلة للاشتقاق في x_0

و لدينا: $(gof)'(x_0)=g'(f(x_0))\times f'(x_0)$.

▪ إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على المجال I , و g قابلة للاشتقاق على المجال $f(I)$, فان الدالة gof قابلة للاشتقاق على المجال I و لدينا: $(\forall x\in I);(gof)'(x)=(g'of)(x)\times f'(x)$

مثال: $h(x)=\sin(x^2+1)$ أدرس اشتقاق الدالة h وحدد الدالة المشتقة

الجواب: نلاحظ أن h هي مركب دالتين :

$f(x)=x^2+1$ و $g(x)=\sin x$ و $h=gof$

لأن: $h(x)=(gof)(x)=g(f(x))$

$$h'(x)=g'(f(x))\times f'(x)=\cos(x^2+1)\times 2x=2x\cos(x^2+1)$$

تمرين7 : $h(x)=\sin(x^2+1)$ أدرس اشتقاق الدالة h وحدد الدالة المشتقة

خاصية2: ليكن I مجالا ضمن $\mathbb{R}$, و f دالة متصلة و رتيبة قطعا على المجال I , و x_0 عنصرا من I .

▪ إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 و $f'(x_0)\neq 0$, فان الدالة f^{-1} قابلة للاشتقاق في $f(x_0)$ و لدينا: $(f^{-1})'(f(x_0))=\frac{1}{f'(x_0)}$

▪ إذا كانت f قابلة للاشتقاق على المجال I بحيث دالتها المشتقة لا تنعدم على I (أي $(\forall x\in I); f'(x)\neq 0$) فان الدالة f^{-1} قابلة للاشتقاق على المجال $f(I)$

و لدينا: $(\forall y\in f(I));(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

مثال: لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x)=x^3-3x$

1. أدرس الدالة f وحدد جدول تغيراتها
2. بين أن الدالة g قصور الدالة f على المجال $I=[1;+\infty[$ تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يجب تحديده
3. أحسب $(g^{-1})'(0)$

أجوبة : 1) الدالة f حدودية اذن $D_f=\mathbb{R}$

اذن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و $f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)=3(x-1)(x+1)$

اشارة f' هي اشارة $(x-1)(x+1)$

$(x-1)(x+1)=0$ يعني $x+1=0$ أو $x-1=0$ يعني $x=-1$ أو $x=1$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^3-3x=\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^3-3x=\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

2) حسب جدول تغيرات الدالة g فان g تزايدية قطعا ومتصلة على $I=[1;+\infty[$ (لأنها دالة حدودية)

ومنه g تقبل دالة عكسية معرفة على المجال :

$$J=g(I)=g([1;+\infty[)=[-2;+\infty[$$

3) $\begin{cases} g(x)=y \\ x\in[1;+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=g^{-1}(y)\\ y\in[-2;+\infty[\end{cases}$

حسب الخاصية لدينا : $(g^{-1})'(0)=\frac{1}{g'(g^{-1}(0))}$

نضع : $g^{-1}(0)=x$ يعني $0=g(x)$ يعني $x^3-3x=0$

يعني $x(x^2-3)=0$ يعني $x=0$ أو $x^2-3=0$

يعني $x=0$ أو $x^2=3$ يعني $x=0$ أو $x=\sqrt3$ أو $x=-\sqrt3$

ونعلم أن : $x\in[1;+\infty[$ اذن نأخذ فقط : $x=\sqrt3$

اذن نجد : $(g^{-1})'(0)=\frac{1}{g'(\sqrt3)}$

ونعلم أيضا أن : $g'(x)=3x^2-3$ اذن: $g'(\sqrt3)=3\times\sqrt3^2-3=6$

ومنه : $(g^{-1})'(0)=\frac16$

نتيجة1: الدالة $x\mapsto x^r$ حيث $r\in\mathbb{Q}$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و لدينا: $(\forall x\in]0;+\infty[);(x^r)'=rx^{r-1}$

مثال: $(\forall x\in]0;+\infty[);\left(x^{\frac25}\right)'=\frac25x^{\frac25-1}=\frac25x^{-\frac35}=\frac25\frac{1}{x^{\frac35}}=\frac25\frac{1}{(\sqrt[5]{x})^3}$

تمرين8 : أحسب مشتقة الدالة المعرفة كالتالي :

$(\forall x\in]0;+\infty[); f(x)=x^{\frac57}$

نتيجة2:

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}^*$. الدالة $x\mapsto\sqrt[n]{x}$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و لدينا: $(\forall x\in]0;+\infty[);u'(x)=\frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$

مثال: $(\forall x\in]0;+\infty[);(\sqrt[3]{x})'=\frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}$

تمرين9 : أحسب مشتقة الدالة المعرفة كالتالي :

$(\forall x\in]0;+\infty[); f(x)=\sqrt[5]{x}$

خاصية3: إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق و موجبة قطعا على مجال I ضمن $\mathbb{R}$,

فان: الدالة $g:x\mapsto\sqrt[n]{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على I .

و لدينا: $(\forall x\in I);g'(x)=\frac{u'(x)}{n(\sqrt[n]{u(x)})^{n-1}}$

مثال : أحسب مشتقة الدالة المعرفة كالتالي : $(\forall x\in\mathbb{R}); f(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$

II.تطبيقات الدالة المشتقة:

1. رتابة دالة وإشارة مشتقاتها

خاصية: لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق على مجال I

- f تزايدية على مجال I يعني $\forall x\in I \quad f'(x)\ge 0$
- f تناقصية على مجال I يعني $\forall x\in I \quad f'(x)\le 0$
- f ثابتة على مجال I يعني $\forall x\in I \quad f'(x)=0$

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x)=x^2+2x-2$

1) حدد D_f 2) أحسب نهايات f عند محدات D_f

3) أدرس تغيرات f 4) حدد جدول تغيرات f 5) بين أن: $f(x)\ge -3$ $\forall x\in\mathbb{R}$

الجواب: 1)الدالة f حدودية اذن $D_f=\mathbb{R}$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+2x-2=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+2x-2=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$

3) $\forall x\in\mathbb{R}: f'(x)=\left(x^2+2x-2\right)'=2x+2$

$f'(x)=0$ يعني $2x+2=0$ يعني $x=-1$

درس اشارة : $f'(x)$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$2x+2$		$-$	0	$+$	

اذا كانت: $x\in[-1;+\infty[$ فان : $f'(x)\ge 0$ ومنه f تزايدية

اذا كانت: $x\in]-\infty;-1]$ فان : $f'(x)\le 0$ ومنه f تناقصية

4)نلخص النتائج في جدول يسمى جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

تمرين10: نعتبر الدالتين f و g المعرفتين كالتالي :

$$\begin{cases} f(x)=x^2+2x; x\le 1 \\ f(x)=-\dfrac{2}{x}+5; x>1 \end{cases} \quad \text{و} \quad g(x)=|x|(x-1)$$

1)أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين وعلى اليسار عند $x_0=1$

2)هل الدالة f قابلة للاشتقاق ؟

3)أدرس قابلية اشتقاق الدالة g عند $x_0=0$

الجواب : $\begin{cases} f(x)=x^2+2x; x\le 1 \\ f(x)=-\dfrac{2}{x}+5; x>1 \end{cases}$ و $f(1)=1^2+2\times 1=3$

(1 $$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{-\frac{4}{x}+5-3}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{-\frac{4}{x}+2}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{-4+2x}{x}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{-4+2x}{x}\times\frac{1}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{-4+2x}{x}\times\frac{1}{x-1}=-\infty$$

ومنه f غير قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0=1$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2+2x-3}{x-1}$$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلا بالتعميل ثم بالاختزال:

نلاحظ أن : 1 جذر للحدودية x^2+2x-3

اذن : هي تقبل القسمة على : $x-1$

وباستعمال تقنية القسمة الاقليدية نجد أن: $x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{(x+3)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}x+3=4$$

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0=1$ و $f'_g(1)=4$

2) f غير قابلة للاشتقاق على اليمين

ومنه : f غير قابلة للاشتقاق عند $x_0=1$

3) $g(x)=|x|(x-1)$ و $g(0)=0$ $\begin{cases} g(x)=x(x-1); x\ge 0 \\ g(x)=-x(x-1); x\le 0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x(x-1)-0}{x-0}=\lim_{x\to0^+}x-1=-1$$

ومنه g قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0=0$ و $-1=f'_d(0)$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{-x(x-1)-0}{x-0}=\lim_{x\to0^-}-x+1=1$$

ومنه g قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0=0$ و $-1=g'_g(0)$

g قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار عند $x_0=0$ ولكن : $g'_d(0)\ne g'_g(0)$

ومنه : g غير قابلة للاشتقاق عند $x_0=0$

تمرين11: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي :

$f(x)=x^3-3x^2+1$

ليكن (C_f) الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$

1. أحسب نهايات الدالة f عند محدات مجموعة التعريف
2. أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f
3. أحسب مشتقة الدالة f و أدرس إشارتها
4. ضع جدول تغيرات الدالة f .
5. أدرس تقعر المنحنى (C_f) الممثل للدالة f وحدد نقط الانعطاف
6. بين أن $A(1;-1)$ مركز تماثل للمنحنى (C_f)
7. حدد معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة $A(1;-1)$
8. أنشئ (C_f) و (T).

تمارين للبحث :

تمرين1: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=|x|\sqrt{1-x}$

1. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين وعلى اليسار عند $x_0=0$ وأعط تأويلا هندسيا للنتائج المحصل عليها
2. هل الدالة f متصلة عند $x_0=0$ ؟
3. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار عند $x_0=1$ وأعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها.

تمرين2: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي :

$$f(x)=\sqrt{x^2-4x-5}$$

أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار عند $x_0=-1$ وأعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها

تمرين3: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية

1) $f(x)=2$ (2 $f(x)=3x-5$ (3 $f(x)=x^{10}$

4) $f(x)=3x^3-\frac{1}{2}x^2-1$ (5 $f(x)=\sqrt{5x^2-10x}$

6) $f(x)=\frac{4x-2}{2x-1}$ (7 $f(x)=6x^4-\cos x+3\sin x$

8) $f(x)=\frac{1}{\sin x}$ (9 $f(x)=\cos\left(7x^2+2\right)$

10) $f(x)=\sin\left(4x^3-3\right)$ (11 $f(x)=\sqrt[3]{x}-\sqrt[5]{x^2}$

12) $f(x)=\sqrt[5]{5x^2-10x}$ (13 $f(x)=\sqrt[4]{\sin x}$

تمرين4: لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x)=x^3-3x$

4. بين أن الدالة g قصور الدالة f على المجال $I=[1;+\infty[$ تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يجب تحديده
5. أحسب $\left(g^{-1}\right)'(0)$

تمرين5: لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$

1. ين أن الدالة g قصور الدالة f على المجال $I=[0;+\infty[$ تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J يجب تحديده
2. أحسب $\left(g^{-1}\right)'\left(\frac{1}{2}\right)$

تمرين6: لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$

1. أدرس تغيرات الدالة f على المجال $I=[0;1[$ و أحسب $f\left(\frac{1}{2}\right)$
2. بين أن قصور الدالة f على المجال $I=[0;1[$ تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يجب تحديده
3. حدد $f^{-1}(x)$
4. أحسب $\left(f^{-1}\right)'\left(-\frac{5}{3}\right)$

تمرين7: لتكن f الدالة العددية المعرفة على $I=[0;+\infty[$ بما يلي : $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

1. بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يجب تحديده
2. أحسب $f\left(\sqrt{3}\right)$ و $\left(f^{-1}\right)'(2)$

جدو ل للدوال المشتقة لدوال اعتيادية و العمليات حول الدوال

الدالة المشتقة f'	لدالة
$f'(x)=0$	$f(x)=k$
$f'(x)=1$	$f(x)=x$
$f'(x)=a$	$f(x)=ax$
$f'(x)=a$	$f(x)=ax+b$
$f'(x)=nx^{n-1}$ $\quad n\in\mathbb{Z}^*$	$f(x)=x^n$
$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$f(x)=\frac{1}{x}$
$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f(x)=\sqrt{x}$
$f'(x)=-\sin x$	$f(x)=\cos x$
$f'(x)=\cos x$	$f(x)=\sin x$
$f'(x)=-a\sin(ax+b)$	$f(x)=\cos(ax+b)$
$f'(x)=a\cos(ax+b)$	$f(x)=\sin(ax+b)$
$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$	$f(x)=\tan x$

الدالة المشتقة f'	الدالة
$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$	$f(x)=\tan x$
$f'(x)=u'+v'$	$f(x)=u+v$
$f'(x)=u'-v'$	$f(x)=u-v$
$f'(x)=k.u'$	$f(x)=k.u$
$f'(x)=u'\times v+u\times v'$	$f(x)=u\times v$
$f'(x)=nu^n\times u'$	$f(x)=u^n$
$f'(x)=-\frac{u'}{u^2}$	$f(x)=\frac{1}{u}$
$f'(x)=\frac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$	$f(x)=\frac{u}{v}$
$f'(x)=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$f(x)=\sqrt{u}$