

الهندسة

مذكرة رقم 2 : ملخص لدروس: الحساب المتجهي في المستوى مع تمارين وأمثلة مطولة

الأهداف والقدرات المنتظرة من الدرس :



توجيهات تربوية	القدرات المنتظرة	محتوى البرنامج
<p>- يتم التذكير بمفهوم جمع متجهين وضرب متجهة في عدد حقيقي ثم تقديم الخصائص $a.(u+v) = a.u + a.v$ و $(a+b).u = a.u + b.u$ و $a.(b.u) = (ab).u$ كما ينبغي ربط ضرب متجهة \overline{AB} في عدد حقيقي x بالنقطة M من المستقيم (AB) التي أفصولها x في المعلم (A, B) أي أن $\overline{AM} = x.\overline{AB}$ وبالتأويل المتجهي لاستقامية ثلاث نقط.</p>	<p>- إنشاء متجهة من الشكل $a\vec{u} + b\vec{v}$. - التعبير عن مفاهيم وخصائص الهندسة التآلفية باستعمال الأداة المتجهية، والعكس. - حل مسائل هندسية باستعمال الأداة المتجهية.</p>	<p>- تساوي متجهتين، جمع متجهتين، علاقة شال؛ - ضرب متجهة في عدد حقيقي؛ - استقامية متجهتين، استقامية ثلاث نقط؛ - تحديد متجهي لمنتصف قطعة.</p>

I. متجهات المستوى: (تذكير)

1. عناصر متجهة:

A و B نقطتان مختلفتان. إذا رمزنا لمتجهة \overline{AB} بالرمز \vec{u} فان:

1. اتجاه \vec{u} هو المستقيم (AB) .

2. منحى \vec{u} هو المنحى من A إلى B .

3. منظم \vec{u} هو المسافة AB ، و نكتب: $\|\vec{u}\| = AB$

حالة خاصة: المتجهة \overline{AA} ليس لها اتجاه و منظمها منعدم و تسمى المتجهة المنعدم، و نكتب $\overline{AA} = \vec{0}$.

خاصية: \vec{u} متجهة و A نقطة من المستوى، توجد نقطة وحيدة M بحيث $\overline{AM} = \vec{u}$.

2. تساوي متجهتين:

تعريف: نقول إن متجهتين متساويتين إذا كان لهما نفس الاتجاه و نفس المنحى و نفس المنظم.

3. مقابل متجهة:

تعريف: لنكن \vec{u} متجهة غير منعدمة. مقابلة المتجهة \vec{u} هي المتجهة التي لها نفس الاتجاه و نفس المنظم و منحناها عكس منحى المتجهة \vec{u} ، و يرمز لها بالرمز $-\vec{u}$. ولدينا $-\overline{AB} = \overline{BA}$.

خاصية: ليكن $ABCD$ رباعيا. $\overline{AB} = \overline{DC}$ تكافئ $ABCD$ متوازي أضلاع.

4. **مجموع متجهتين: علاقة شال:** A و B نقطتان من المستوى.

لكل نقطة C من المستوى. لدينا: $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$.

مثال: $\overline{AB} + \overline{EC} + \overline{BE} + \overline{CA} = \overline{AF} + \overline{EC} + \overline{CA} = \overline{AC} + \overline{CA} = \vec{0}$

تمرين 1: نعتبر المتجهتين $\vec{U} = \overline{BC} - \overline{AC} - \overline{BA} + \overline{AB}$ و $\vec{V} = \overline{BE} + \overline{DF} + \overline{EF} + \overline{AB} + \overline{ED} + \overline{FA}$

بسط المتجهتين \vec{U} و \vec{V}

الجواب: $\vec{U} = \overline{BC} - \overline{AC} - \overline{BA} + \overline{AB} = \overline{BC} + \overline{CA} + \overline{AB} + \overline{AB} = \vec{0} + \overline{AB} = \overline{AB}$

$\vec{V} = \overline{BE} + \overline{DF} + \overline{EF} + \overline{AB} + \overline{ED} + \overline{FA} = \overline{BE} + \overline{EF} + \overline{FA} + \overline{AB} + \overline{ED} + \overline{DF}$

$\vec{V} = \overline{BF} + \overline{FB} + \overline{EF} = \vec{0} + \overline{EF} = \overline{EF}$

قاعدة متوازي الأضلاع لإنشاء مجموع متجهتين:

O و A و B ثلاث نقط غير مستقيمة.

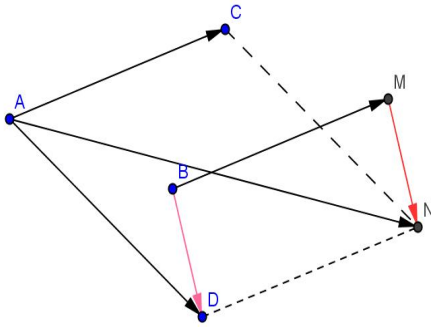
مجموع المتجهتين \overline{OA} و \overline{OB} هو المتجهة \overline{OC} بحيث يكون الرباعي $OACB$ متوازي الأضلاع.

تمرين 2: لتكن A و B و C و D ثلاث نقط من المستوى

(1) أنشئ النقط M و N بحيث: $\overline{BM} = \overline{AC}$ و $\overline{AN} = \overline{AC} + \overline{AD}$

(2) قارن المتجهتين: \overline{BD} و \overline{MN}

(الجواب: 1)



$$\overline{MN} = \overline{MA} + \overline{AN} = \overline{MB} + \overline{BA} + \overline{AC} + \overline{AD} \quad (1)$$

$$\text{ومنه: } \overline{MN} = -\overline{BM} + \overline{BA} + \overline{AD} + \overline{AC} = -\overline{BM} + \overline{BD} + \overline{AC}$$

$$\overline{MN} = -\overline{AC} + \overline{BD} + \overline{AC} = \overline{BD}$$

تمرين 3: ABC مثلث و M نقطة من المستوى

نعتبر النقط D و E بحيث: $\overline{MD} = \overline{MA} + \overline{BC}$ و $\overline{ME} = \overline{MB} + \overline{CA}$

ماهي طبيعة الرباعيين $ABCD$ و $ACBE$ ؟

(الجواب: 1) $\overline{MD} = \overline{MA} + \overline{BC}$ يعني $\overline{MA} + \overline{AD} = \overline{MA} + \overline{BC}$

يعني $\overline{AD} = \overline{BC}$ ومنه $ABCD$ متوازي الأضلاع

(2) $\overline{ME} = \overline{MB} + \overline{CA}$ يعني $\overline{MA} + \overline{AE} = \overline{MA} + \overline{AB} + \overline{CA}$

يعني $\overline{AE} = \overline{AB} + \overline{CA}$ يعني $\overline{AE} = \overline{CA} + \overline{AB}$

ومنه $ACBE$ متوازي الأضلاع

تمرين 4: ليكن ABC مثلث و لتكن E منتصف القطعة $[BC]$

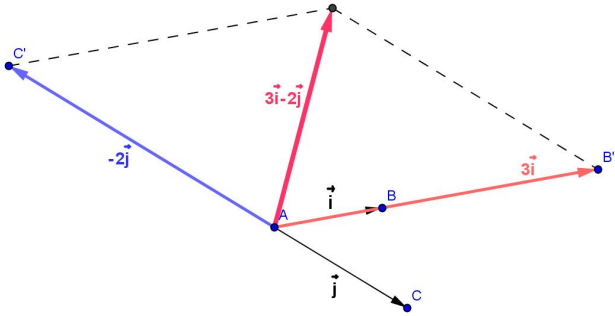
و M نقطة من المستوى حيث: $\overline{CM} = \overline{CA} + \overline{CE}$

(1) أرسم شكلا (2) بين أن: $ACEM$ متوازي الأضلاع

(3) بين أن: $AEBM$ متوازي الأضلاع

(الجواب: 1)

أنظر الشكل



2. **خصايات:** لكل متجهتين \vec{u} و \vec{v} و لكل عددين حقيقيين k و k' لدينا: $(k+k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$ و $(kk')\vec{u} = k(k'\vec{u})$

و $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$ و $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$ و $k\vec{0} = \vec{0}$ و $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$

أمثلة: $5\vec{AB} - \frac{3}{2}\vec{AB} = \left(5 - \frac{3}{2}\right)\vec{AB} = \frac{7}{2}\vec{AB}$

$2\left(\frac{3}{2}\vec{AB}\right) = \left(2 \times \frac{3}{2}\right)\vec{AB} = 3\vec{AB}$

$2\vec{AB} + 2\vec{BC} = 2(\vec{AB} + \vec{BC}) = 2\vec{AC}$

$2\vec{AB} = \vec{0}$ تكافئ أن $\vec{AB} = \vec{0}$ أي أن $A = B$

تمرين 7: \vec{u} و \vec{v} متجهتان. نضع: $\vec{w} = \frac{3}{5}(5\vec{u} - \frac{7}{2}\vec{v}) - 6(\vec{u} + \frac{1}{10}\vec{v})$

أوجد عددين حقيقيين x و y بحيث: $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$

الجواب: $\vec{w} = \frac{3}{5}(5\vec{u} - \frac{7}{2}\vec{v}) - 6(\vec{u} + \frac{1}{10}\vec{v}) = 3\vec{u} - \frac{21}{10}\vec{v} - 6\vec{u} - \frac{3}{5}\vec{v} = -3\vec{u} - \frac{27}{10}\vec{v}$

ومنه $x = -3$ و $y = -\frac{27}{10}$

3. استقامة متجهتين-استقامة ثلاث نقط:

تعريف: لتكن \vec{u} و \vec{v} متجهتين غير منعدمتين.

$\vec{v} = k\vec{u}$ و \vec{u} و \vec{v} مستقيمتان إذا وجد عدد حقيقي k غير منعدم حيث: $\vec{v} = k\vec{u}$ المتجهة المنعدمة مستقيمة مع جميع المتجهات.

تمرين 8: وليكن ABC مثلثا. ولتكن النقطة D حيث $\vec{BD} = 3\vec{DC}$

1. بين أن: \vec{BD} و \vec{BC} مستقيمتين

2. أنشئ النقطة D

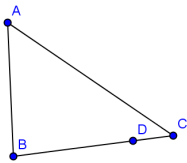
الجواب (1): لدينا $\vec{BD} = 3\vec{DC}$ تكافئ $\vec{BD} = 3(\vec{DB} + \vec{BC})$

تكافئ $\vec{BD} - 3\vec{DB} = 3\vec{BC}$ تكافئ $\vec{BD} = 3\vec{DB} + 3\vec{BC}$

تكافئ $\vec{BD} + 3\vec{BD} = 3\vec{BC}$ تكافئ $4\vec{BD} = 3\vec{BC}$ تكافئ $\vec{BD} = \frac{3}{4}\vec{BC}$

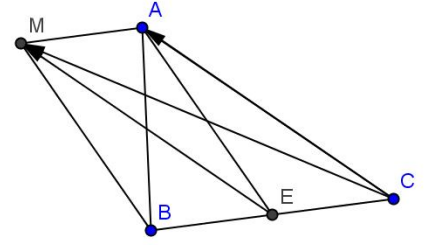
وبالتالي: \vec{BD} و \vec{BC} مستقيمتين

(2) $\vec{BD} = \frac{3}{4}\vec{BC}$ ومنه الانشاء



خاصية: لتكن A و B و C و D أربع نقط حيث $A \neq B$ و $A \neq D$ و $C \neq D$

\vec{AB} و \vec{CD} مستقيمتان إذا و فقط إذا كان (AB) و (CD) متوازيين



(2) مثلا يكفي ان نبين أن: $\vec{ME} = \vec{AC}$ ؟؟؟؟؟

لدينا: $\vec{CM} = \vec{CA} + \vec{CE}$ يعني $\vec{CE} + \vec{EM} = \vec{CA} + \vec{CE}$ يعني $\vec{EM} = \vec{CA}$ يعني $-\vec{ME} = -\vec{AC}$ يعني $\vec{ME} = \vec{AC}$ ومنه $ACEM$ متوازي الأضلاع

(3) مثلا يكفي ان نبين أن: $\vec{AE} = \vec{MB}$ ؟؟؟؟؟

لدينا: $\vec{AC} = \vec{ME}$ يعني $\vec{AE} + \vec{EC} = \vec{MB} + \vec{BE}$ ونعلم أن E : منتصف القطعة $[BC]$ اذن: $\vec{BE} = \vec{EC}$ ومنه $\vec{AE} = \vec{MB}$ وبالتالي: $AEBM$ متوازي الأضلاع

II. ضرب متجهة في عدد حقيقي:

1. **تعريف:** لتكن \vec{u} متجهة غير منعدمة و k عددا حقيقيا غير منعدم. ضرب المتجهة \vec{u} في العدد الحقيقي k هي المتجهة التي نرمز لها بالرمز: $k\vec{u}$ و المعرفة كما يلي:

- لها نفس اتجاه المتجهة \vec{u} .
- لها نفس منحنى المتجهة \vec{u} في حالة: $k > 0$ و لها منحنى معاكس للمتجهة \vec{u} في حالة: $k < 0$
- منظمها يساوي $\|k\vec{u}\| = |k| \cdot \|\vec{u}\|$.

مثال: A و B نقطتان من المستوى بحيث: $AB = 1cm$

- 1) أرسم النقطتين C و D بحيث: $\vec{AC} = 2\vec{AB}$ و $\vec{AD} = -3\vec{AB}$
- 2) أحسب المسافتين: AC و AD (الأجوبة: 1)



(2) لدينا $\vec{AC} = 2\vec{AB}$ اذن: $\|\vec{AC}\| = \|\vec{2AB}\|$

اذن: $AC = 2|AB|$ اذن: $AC = 2cm$

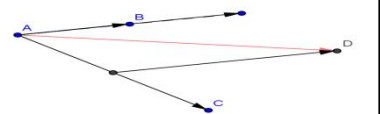
لدينا $\vec{AD} = -3\vec{AB}$ اذن: $\|\vec{AD}\| = \|\vec{-3AB}\|$

اذن: $AD = 3|AB|$ اذن: $AD = 3cm$

تمرين 5: لتكن A و B و C ثلاث نقط غير مستقيمة.

أنشئ النقطة D بحيث $\vec{AD} = 2\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$

الجواب:



تمرين 6: ABC مثلث و نضع: $\vec{AB} = \vec{i}$ و $\vec{AC} = \vec{j}$

أنشئ المتجهات التالية: $3\vec{i}$ و $-\vec{2j}$ و $3\vec{i} - 2\vec{j}$

الجواب:

لكن ABC مثلثا. إذا كان I منتصف القطعة $[AB]$ و J منتصف

$$\text{القطعة } [AC] \text{ فان: } \overline{IJ} = \frac{1}{2} \overline{BC}$$

برهان: ليكن ABC مثلثا. I و J هما على التوالي منتصفي القطعتين $[AB]$ و $[AC]$.

$$\text{لدينا: } \overline{IJ} = \overline{IA} + \overline{AJ}$$

$$= \frac{1}{2} \overline{BA} + \frac{1}{2} \overline{AC}$$

$$= \frac{1}{2} (\overline{BA} + \overline{AC}) = \frac{1}{2} \overline{BC}$$

ملاحظة: $\overline{IJ} = \frac{1}{2} \overline{BC}$ تعني أن المتجهين \overline{IJ} و \overline{BC} مستقيمتين

ومنه: $(IJ) \parallel (BC)$

تمرين 11: مثلث ABC مثلث و E و F نقطتان حيث:

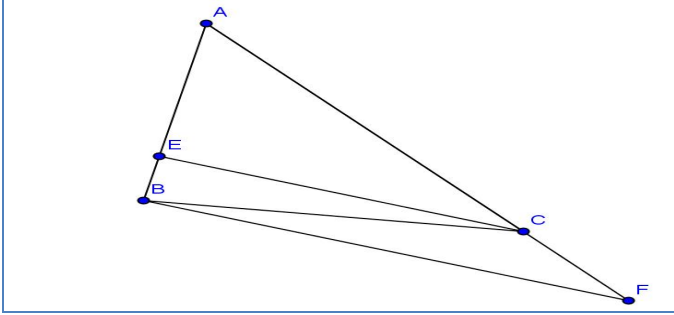
$$\overline{AE} = \frac{3}{4} \overline{AB} \text{ و } \overline{AF} = \frac{4}{3} \overline{AC}$$

(1) أنشئ الشكل.

(2) أكتب كلا من المتجهين \overline{EC} و \overline{BF} بدلالة \overline{AB} و \overline{AC}

(3) استنتج أن المستقيمين (BF) و (EC) متوازيان.

أجوبة (1):



$$(2) \overline{EC} = \overline{EA} + \overline{AC} \text{ حسب علاقة شال ان: } \overline{EC} = -\overline{AE} + \overline{AC}$$

$$\text{يعني } \overline{EC} = -\frac{3}{4} \overline{AB} + \overline{AC} \text{ يعني } \overline{EC} = -\frac{3}{4} \overline{AB} + \overline{AC} \text{ وهي النتيجة}$$

المطلوبة

ولدينا $\overline{BF} = \overline{BA} + \overline{AF}$ حسب علاقة شال ان

$$\text{و هي النتيجة المطلوبة: } \overline{BF} = -\overline{AB} + \frac{4}{3} \overline{AC}$$

$$(3) \text{ وجدنا } \overline{EC} = -\frac{3}{4} \overline{AB} + \overline{AC} \text{ ان: } \overline{EC} = \frac{3}{4} \left(-\overline{AB} + \frac{4}{3} \overline{AC} \right)$$

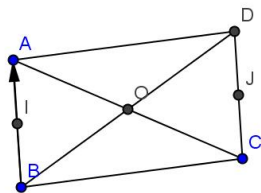
$$\text{ان: } \overline{EC} = \frac{3}{4} \overline{BF} \text{ يعني } \overline{EC} = \frac{3}{4} \left(\overline{BA} + \frac{4}{3} \overline{AC} \right)$$

ان: المستقيمين (BF) و (EC) متوازيان.

تمرين 12: ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O . I و J هما على التوالي منتصفي القطعتين $[AB]$ و $[CD]$.

$$(1) \text{ بين أن: } \overline{OI} = \frac{1}{2} \overline{CB} \text{ و } \overline{OJ} = \frac{1}{2} \overline{BC}$$

(2) استنتج أن O هو منتصف القطعة $[IJ]$.



أجوبة (1):

خاصية: تكون النقط A و B و C مستقيمة إذا و فقط إذا

كانت \overline{AB} و \overline{AC} مستقيمتين.

مثال: في كل شبه منحرف $ABCD$ قاعدته $[AB]$ و $[CD]$.

لدينا المتجهان \overline{AB} و \overline{CD} مستقيمتان.

تمرين 9: نعتبر النقط A و B و M

$$\text{بحيث: } 2\overline{MA} + 3\overline{MB} + 3\overline{AB} = \overline{0}$$

1. بين أن: $\overline{AM} = \frac{6}{5} \overline{AB}$ ماذا تستنتج بالنسبة للمتجهين \overline{AM} و \overline{AB}

2. استنتج أن النقطة M تنتمي إلى المستقيم (AB) .

(الجواب: 1) $2\overline{MA} + 3\overline{MB} + 3\overline{AB} = \overline{0}$ يعني

$$2\overline{MA} + 3\overline{MA} + 6\overline{AB} = \overline{0} \text{ يعني } 2\overline{MA} + 3(\overline{MA} + \overline{AB}) + 3\overline{AB} = \overline{0}$$

$$\text{يعني } 5\overline{MA} = -6\overline{AB} \text{ يعني } -5\overline{AM} = -6\overline{AB} \text{ يعني } \overline{AM} = \frac{6}{5} \overline{AB}$$

اذن المتجهين \overline{AM} و \overline{AB} مستقيمتين

(2) $\overline{AM} = \frac{6}{5} \overline{AB}$ تعني أن النقط A و B و M مستقيمة وأن

M تنتمي إلى المستقيم (AB) .

III. منتصف قطعة:

خاصية 1: I منتصف القطعة $[AB]$ إذا و فقط إذا كانت I تحقق إحدى

المتساويتين: (1) $\overline{AI} = \overline{IB}$ أو (2) $\overline{AB} = 2\overline{AI}$ أو $\overline{AI} + \overline{IB} = \overline{0}$

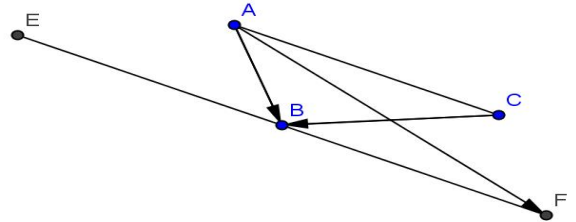
تمرين 10: مثلث ABC مثلث و E و F نقطتين بحيث: $\overline{AE} = \overline{CB}$

$$\text{و } \overline{AF} = \overline{AB} + \overline{AC}$$

(1) أنشئ شكلا تقريبا

(2) بين أن B منتصف القطعة $[EF]$.

أجوبة (1):



(2) يكفي مثلا أن نبين أن: $\overline{BE} + \overline{BF} = \overline{0}$ ؟؟؟؟

$$\overline{BE} + \overline{BF} = \overline{BA} + \overline{AE} + \overline{BA} + \overline{AF}$$

$$\text{بحسب علاقة شال } \overline{BE} + \overline{BF} = \overline{BA} + \overline{CB} + \overline{BA} + \overline{AB} + \overline{AC}$$

$$\overline{BA} + \overline{AB} = \overline{0} \text{ لأن: } \overline{BE} + \overline{BF} = \overline{BA} + \overline{AC} + \overline{CB}$$

$$\text{ودائما حسب علاقة شال نجد } \overline{BE} + \overline{BF} = \overline{BB} = \overline{0}$$

وبالتالي B منتصف القطعة $[EF]$.

خاصية 2: (الخاصية المميزة لمنتصف قطعة): I منتصف القطعة

$[AB]$ لكل نقطة M من المستوى لدينا: $2\overline{MI} = \overline{MA} + \overline{MB}$. برهان:

لتكن M نقطة من المستوى.

$$\text{لدينا: } \overline{MA} + \overline{MB} = (\overline{MI} + \overline{IA}) + (\overline{MI} + \overline{IB}) = 2\overline{MI} + \overline{IA} + \overline{IB} = 2\overline{MI}$$

(لأن $\overline{IA} + \overline{IB} = \overline{0}$)

ومن هنا لكل نقطة M من المستوى لدينا: $2\overline{MI} = \overline{MA} + \overline{MB}$

خاصية 3: (خاصية منتصف ضلعي مثلث)



تمارين للبحث والتثبيت

تمرين 1: ليكن ABC مثلثا و M و N و P ثلاث نقط

$$\overline{AP} = \overline{AB} - \frac{1}{3}\overline{BC} \text{ و } \overline{AN} = \frac{1}{3}\overline{AC} \text{ و } \overline{AM} = \frac{2}{3}\overline{AB}$$

(1) دون إنشاء الشكل، بين

$$\overline{MN} + \overline{MP} = -2\overline{AM} + \overline{AN} + \overline{AP}$$

(2) بين أن M منتصف القطعة $[NP]$.

تمرين 2: ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع و O نقطة من المستوى

$$\text{ونعتبر النقط : } P \text{ و } Q \text{ و } R \text{ بحيث: } \overline{OP} = 3\overline{OB} \text{ و } \overline{PQ} = 3\overline{AD}$$

و $\overline{OR} = 3\overline{OB}$ و لتكن النقطة I بحيث $RPQI$ متوازي أضلاع

(1) بين أن النقط : O و D و R مستقيمية

(2) بين أن المستقيمين (PR) و (AB) متوازيان.

(3) بين أن النقط : O و C و I مستقيمية

تمرين 3: ABC مثلث و A' منتصف القطعة $[BC]$. و لتكن B'

$$\text{منتصف القطعة } [AC] \text{ و لتكن النقطة } G \text{ بحيث } \overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{AA'}$$

$$\text{ونضع : } \overline{AB} = \vec{i} \text{ و } \overline{AC} = \vec{j}$$

(1) عبر عن المتجهة $\overline{AA'}$ ثم المتجهة \overline{AG} بدلالة \vec{i} و \vec{j}

(2) عبر عن المتجهتين \overline{BG} و $\overline{BB'}$ بدلالة \vec{i} و \vec{j}

(3) استنتج أن المتجهتين \overline{BG} و $\overline{BB'}$ مستقيمتان وماذا تستنتج

بالنسبة للنقط : B و B' و G ؟

تمرين 4: ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع و E و F نقطتان حيث:

$$\overline{BF} = \frac{1}{2}\overline{AB} \text{ و } \overline{AF} = 3\overline{AD}$$

(1) أرسم شكلا.

$$(2) \text{ بين أن: } \overline{CE} = \frac{1}{2}\overline{AB} - \overline{BC} \text{ و } \overline{CF} = 2\overline{AD} + \overline{DC}$$

(3) بين أن: للنقط F و C و E مستقيمية

(4) ولتكن I منتصف القطعة $[DF]$ والنقطة J بحيث: $\overline{AB} = \overline{BJ}$

بين أن: C منتصف القطعة $[IJ]$

تمرين 5: ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع و G و H نقطتان حيث:

$$\overline{AH} = \frac{5}{4}\overline{AG} \text{ و } \overline{CG} = \frac{1}{5}\overline{CD}$$

$$(1) \text{ بين أن: } \overline{HG} = \frac{1}{5}\overline{HA} \text{ و } \overline{HC} = \frac{1}{5}\overline{HB}$$

$$(2) \text{ بين أن: } 2\overline{BE} + 3\overline{BF} = \vec{0}$$

(3) بين أن النقط B و C و H مستقيمية

انتهى الدرس

نعتبر المثلث ABC لدينا I منتصف القطعة $[AB]$ و O منتصف

$$\text{القطعة } [AC] \text{ اذن حسب خاصية لدينا: } \overline{OI} = \frac{1}{2}\overline{CB}$$

ونعتبر المثلث ACD لدينا J منتصف القطعة $[DC]$ و O منتصف

$$\text{القطعة } [AC] \text{ اذن حسب خاصية لدينا: } \overline{OJ} = \frac{1}{2}\overline{AD}$$

(2) لكي نبين أن: O هو منتصف القطعة $[IJ]$ يكفي أن نبين أن

$$\overline{OI} + \overline{OJ} = \vec{0} \text{ :} \text{????????}$$

$$\overline{OI} + \overline{OJ} = \frac{1}{2}\overline{CB} + \frac{1}{2}\overline{AD}$$

وبما أن $ABCD$ متوازي أضلاع فان: $\overline{BC} = \overline{AD}$

$$\text{ومنه: } \overline{OI} + \overline{OJ} = \frac{1}{2}\overline{CB} + \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2}\overline{CB} - \frac{1}{2}\overline{CB} = \vec{0}$$

وبالتالي: O هو منتصف القطعة $[IJ]$.

تمرين 13: ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع و E و F نقطتان حيث:

$$\overline{CF} = \frac{2}{3}\overline{DC} \text{ و } \overline{DE} = \frac{5}{2}\overline{DA}$$

$$(1) \text{ بين أن: } \overline{BE} = \frac{3}{2}\overline{DA} - \overline{AB} \text{ و } \overline{BF} = \frac{2}{3}\overline{DC} + \overline{BC}$$

$$(2) \text{ بين أن: } 2\overline{BE} + 3\overline{BF} = \vec{0}$$

ماذا تستنتج بالنسبة للنقط F و B و E ؟

أجوبة: (1) حسب علاقة شال $\overline{BE} = \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE}$

وبما أن $ABCD$ متوازي أضلاع فان: $\overline{BC} = \overline{AD}$ و $\overline{CD} = \overline{BA}$

$$\text{ونعلم أن: } \overline{DE} = \frac{5}{2}\overline{DA}$$

$$\text{اذن: } \overline{BE} = \overline{AD} + \overline{BA} + \frac{5}{2}\overline{DA} = -\overline{DA} + \frac{5}{2}\overline{DA} + \overline{BA} = \frac{3}{2}\overline{DA} - \overline{AB}$$

$$(ب) \text{ حسب علاقة شال } \overline{BF} = \overline{BC} + \overline{CF} \text{ اذن: } \overline{BF} = \overline{BC} + \frac{2}{3}\overline{DC}$$

$$(2) \quad 2\overline{BE} + 3\overline{BF} = 2\left(\frac{3}{2}\overline{DA} - \overline{AB}\right) + 3\left(\overline{BC} + \frac{2}{3}\overline{DC}\right)$$

$$= 3\overline{DA} - 2\overline{AB} + 3\overline{BC} + 2\overline{DC}$$

فان: $\overline{DC} = \overline{AB}$ و $\overline{CB} = \overline{DA}$

$$\text{اذن: } 2\overline{BE} + 3\overline{BF} = 3\overline{CB} - 2\overline{AB} + 3\overline{BC} + 2\overline{AB} = \vec{0}$$

$$\text{الاستنتاج: } 2\overline{BE} + 3\overline{BF} = \vec{0} \text{ يعني } \overline{BE} = -\frac{3}{2}\overline{BF}$$

ومنه النقط F و B و E مستقيمية

ملاحظات عامة حول الدرس :