# ملخص درس عموميات حول الدوال

## I.تذكير

### 1)مجموعة تعريف دالة عددية:

**تعريف:** لتكن $f$ دالة عددية لمتغير حقيقي $x$.

مجموعة تعريف الدالة $f$ هي المجموعة المكونة من جميع الأعداد الحقيقية $x$ بحيث $f(x)$ موجود أي $f(x)$ قابلة للحساب. و يرمز لها غالبا بالرمز $D_f$ بمعنى: $x \in D_f$ تكافئ $f(x) \in \mathbb{R}$.

**مثال:** حدد مجموعة تعريف الدالة $f$ في الحالات التالية:

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 5x + 10$ (2 $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{4x - 12}$

3) $f(x) = \dfrac{x-5}{2x^2 - 5x - 3}$ (4 $f(x) = \sqrt{-3x+6}$

**الجواب:** 1) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 5x + 10$

يعني $D_f = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{4x - 12}$ يعني $D_f = \{x \in \mathbb{R} / 4x - 12 \neq 0\}$

$4x - 12 = 0$ يعني $4x = 12$ يعني $x = 3$ ومنه $D_f = \mathbb{R} - \{3\}$

3) $f(x) = \dfrac{x-5}{2x^2 - 5x - 3}$ يعني

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x^2 - 5x - 3 \neq 0\}$

$2x^2 - 5x - 3 = 0$ نحل المعادلة باستعمال المميز

$a = 2$ و $b = -5$ و $c = -3$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4\times2\times(-3) = 25 + 24 = 49 = (7)^2 > 0$

بما أن $\Delta \succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \dfrac{-(-5) + \sqrt{49}}{2\times2} = \dfrac{7+5}{4} = \dfrac{12}{4} = 3$ و $x_2 = \dfrac{(-5) - \sqrt{49}}{2\times2} = \dfrac{5-7}{4} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$

ومنه: $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{2}; 3\right\}$

4) $f(x) = \sqrt{-3x+6}$ يعني $D_f = \{x \in \mathbb{R} / -3x + 6 \geq 0\}$

$-3x + 6 \geq 0$ يعني $-3x \geq -6$ يعني $x \leq \dfrac{-6}{-3}$ يعني $x \leq 2$ ومنه

$D_f = ]-\infty; 2]$

### 2)زوجية دالة عددية:

**مثال:** أدرس زوجية الدالة $f$ في الحالات التالية: 1) $f(x) = 3x^2$

2) $f(x) = \dfrac{4}{x}$

**الأجوبة :** 1) $f(x) = 3x^2$

$D_f = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

أ) لكل $x$ من $D_f = \mathbb{R}$ لدينا: $-x$ تنتمي إلى $D_f = \mathbb{R}$

ب) $f(-x) = 3(-x)^2 = 3x^2 = f(x)$ ومنه $f$ دالة زوجية

2) $f(x) = \dfrac{4}{x}$ $D_f = \mathbb{R}^*$

أ) لكل $x$ من $D_f = \mathbb{R}^*$ لدينا: $-x$ تنتمي إلى $D_f = \mathbb{R}^*$

ب) $f(-x) = \dfrac{4}{-x} = -\dfrac{4}{x} = -f(x)$ ومنه $f$ دالة فردية

**التأويلات المبيانية:** لتكن $f$ دالة عددية لمتغير $x$ حقيقي و $C_f$ منحناها في معلم متعامد ممنظم $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

- ❖ تكون $f$ دالة زوجية إذا و فقط إذا كان محور الأراتيب محور تماثل المنحنى $C_f$.
- ❖ تكون $f$ دالة فردية إذا و فقط إذا كانت النقطة 0 مركز تماثل المنحنى $C_f$.

## II.الدالة المكبورة والدالة المصغورة والدالة المحدودة

**تعريف:** لتكن $f$ دالة عددية معرفة على مجال $I$ من $\mathbb{R}$.

- نقول إن $f$ دالة مكبورة على مجال $I$ إذا وجد عدد حقيقي $M$ بحيث : $\forall x \in I \quad f(x) \leq M$
- نقول إن $f$ دالة مصغورة على مجال $I$ إذا وجد عدد حقيقي $m$ بحيث : $\forall x \in I \quad f(x) \geq m$
- نقول إن $f$ دالة محدودة على مجال $I$ إذا كانت مكبورة و مصغورة على المجال $I$.

**مثال1:** نعتبر الدالة $f$ المعرفة كالتالي : $f(x) = x^2 - 2x + 5$

بين أن الدالة $f$ مصغورة بالعدد 4

**الجواب :** يكفي أن نبين أن : $\forall x \in \mathbb{R} \; 4 \leq f(x)$

اذن نحسب الفرق : $f(x) - 4 = x^2 - 2x + 5 - 4 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$

ومنه : $\forall x \in \mathbb{R} \; 4 \leq f(x)$

وبالتالي $f$ مصغورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 4

**مثال2:** نعتبر الدالة $f$ المعرفة كالتالي : $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$

بين أن الدالة $f$ مكبورة بالعدد 3

**الجواب :** يكفي أن نبين أن : $\forall x \in \mathbb{R} \; f(x) \leq 3$

اذن نحسب الفرق : $3 - f(x) = 3 - (-2x^2 + 4x + 1) = 3 + 2x^2 - 4x - 1$

$3 - f(x) = 2x^2 - 4x + 2 = 2(x^2 - 2x + 1) = 2(x-1)^2 \geq 0$

ومنه : $\forall x \in \mathbb{R} \; f(x) \leq 3$ وبالتالي $f$ مكبورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 3

## III.مطاريف دالة عددية

**تعريف:** لتكن $f$ دالة عددية معرفة على مجال $I$ و $a$ عنصرا من المجال $I$

- ▪نقول إن $f(a)$ هي القيمة القصوى للدالة $f$ على المجال $I$, إذا كان : $\forall x \in I \quad f(x) \leq f(a)$
- ▪نقول إن $f(a)$ هي القيمة الدنيا للدالة $f$ على المجال $I$, إذا كان : $\forall x \in I \quad f(x) \geq f(a)$

## IV.مقارنة دالتين

**تعريف1:** لتكن $f$ و $g$ دالتين عدديتين و $D_f$ و $D_g$ على التوالي مجموعة تعريفهما.

نقول إن $f$ تساوي $g$ ونكتب $f = g$ إذا وفقط إذا كان :

$D_g = D_f$ و $(\forall x \in D_f) \quad f(x) = g(x)$

**تعريف2:** لتكن $f$ و $g$ دالتين عدديتين معرفتين على مجال $I$ .
نقول إن $f$ أصغر من أو يساوي $g$ على مجال $I$ ونكتب $f \leq g$ إذا وفقط إذا كان :

$$(\forall x \in I) \quad f(x) \leq g(x)$$

**التأويل الهندسي :** $f \leq g$ على مجال $I$ يعني هندسيا أن منحنى الدالة $f$ يوجد تحت منحنى الدالة $g$ على المجال $I$ .

**ملحوظة :**

- $f < g$ على المجال $I$
  إذا وفقط إذا كان : $(\forall x \in I) \; f(x) < g(x)$
- $f \geq 0$ على المجال $I$
  إذا وفقط إذا كان : $(\forall x \in I) \; f(x) \geq 0$

## V.رتابة دالة عددية

- يمكن دراسة رتابة دالة $f$ على مجال $I$ بدراسة إشارة معدل التغير : $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$
  مع $x_1$ و $x_2$ عنصرين مختلفين من $I$
- نقول إن $f$ دالة رتيبة على $I$ إذا كانت $f$ تزايدية قطعا أو تناقصية قطعا على مجال $I$ .

**مثال1:** لتكن الدالة $f$ المعرفة كالتالي : $f(x)=4x-3$
1) حدد $D_f$ 2) أدرس رتابة $f$ 3)حدد جدول تغيرات الدالة $f$

**أجوبة :** 1) $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية
2)ليكن: $x_1 \in \mathbb{R}$ و $x_2 \in \mathbb{R}$ بحيث $x_1 \neq x_2$
نحسب معدل تغير الدالة $f$ : $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(4x_2-3)-(4x_1-3)}{x_2-x_1}=\frac{4x_2-4x_1}{x_2-x_1}=\frac{4(x_2-x_1)}{x_2-x_1}$$

ومنه : $T=4\geq 0$ وبالتالي الدالة $f$ تزايدية على $\mathbb{R}$
3)جدول التغيرات

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f(x)$ | ↗ | |

**مثال2:** لتكن الدالة $g$ المعرفة كالتالي : $g(x)=-3x+2$
1) حدد $D_g$ 2) أدرس رتابة $g$ 3)حدد جدول تغيرات الدالة $g$

**أجوبة :** 1) $D_g=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية
2)ليكن: $x_1 \in \mathbb{R}$ و $x_2 \in \mathbb{R}$ بحيث $x_1 \neq x_2$
نحسب معدل تغير الدالة $g$ : $\dfrac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}$

$$\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(-3x_2+2)-(-3x_1+2)}{x_2-x_1}=\frac{-3x_2+3x_1}{x_2-x_1}=\frac{-3(x_2-x_1)}{x_2-x_1}$$

ومنه : $T=-3\leq 0$ وبالتالي الدالة $g$ تناقصية على $\mathbb{R}$
3)جدول التغيرات

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $g(x)$ | ↘ | |

**مثال3:** لتكن $f$ دالة معرفة ب: $f(x)=2x^2$ .
1) حدد $D_f$ 2) أدرس زوجية الدالة $f$
3)أحسب معدل تغير الدالة $f$
4)أدرس رتابة الدالة $f$ على كل من المجالين $[0;+\infty[$ و $]-\infty;0]$
5)وحدد جدول تغيرات الدالة $f$ .
6)حدد مطا ريف الدالة $f$
7)أرسم التمثيل المبياني للدالة $f$

**أجوبة :** 1) $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية
2) أ) لكل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا: $-x$ تنتمي إلى $\mathbb{R}$ .
ب) $f(-x)=2(-x)^2=2x^2=f(x)$
ومنه $f$ دالة زوجية
3)حساب معدل تغير الدالة $f$

$$T=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{2x_2^2-2x_1^2}{x_2-x_1}=\frac{2(x_2^2-x_1^2)}{x_2-x_1}$$

$$T=\frac{2(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{x_2-x_1}=2(x_2+x_1)$$

4) أ) دراسة رتابة الدالة $f$ على المجال $[0;+\infty[$ :
ليكن : $x_1 \in [0;+\infty[$ و $x_2 \in [0;+\infty[$
اذن $T=2(x_2+x_1)\geq 0$
ومنه الدالة $f$ تزايدية على $[0;+\infty[$
ب) دراسة رتابة الدالة $f$ على المجال $]-\infty;0]$ :
ليكن : $x_1 \in ]-\infty;0]$ و $x_2 \in ]-\infty;0]$
اذن $T=2(x_2+x_1)\leq 0$
ومنه الدالة $f$ تناقصية على $]-\infty;0]$
5)حدد جدول تغيرات الدالة $f$ .

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | ↘ | $0$ | ↗ |

6) $f$ تقبل قيمة دنيا عند $x_0=0$
7) رسم التمثيل المبياني للدالة $f$

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | 2 | 8 | 18 |