

مستوى : السنة الثانية من سلك البكالوريا

شعبة العلوم التجريبية

- مسلك علوم الحياة و الأرض
- مسلك العلوم الفيزيائية
- مسلك العلوم الزراعية

مذكرة رقم 3 في درس دراسة الدوال

محتوى البرنامج

- التمثيل المبياني لدالة عددية (تذكير): المقاربات الأفقية والعمودية و المائلة
- الفروع الشلجمية
- تقعر منحنى ونقط الإنعطاف
- محور تماثل ومركز تماثل
- دراسة وتمثيل دوال لا جذرية ومثلثية

القدرات المنتظرة

- حساب مشتقات الدوال الاعتيادية
- تحديد رتبة دالة انطلاقا من إشارة مشتقتها .
- تحديد إشارة دالة انطلاقا من جدول تغيراتها أو من تمثيلها المبياني
- الحل المبياني لمعادلة من الشكل : $f(x) = g(x)$ و مترجمات من الشكل : $f(x) \leq g(x)$
- تحديد مشتقة و رتبة الدالة العكسية لدالة متصلة و رتبة قطاعا على مجال و تمثيلها المبياني
- حل مسائل تطبيقية حول القيم الدنوية و القيم القصوية
- دراسة وتمثيل دوال حدودية وجذرية و لا جذرية و دوال مثلثية .

I. التمثيل المبياني لدالة عددية (تذكير):

في جميع الفقرات المتبقية، f دالة عددية لمتغير حقيقي x و (C)

منحناها في معلم متعامد منظم $(o; \vec{i}; \vec{j})$

1) المقارب الموازي لمحور الأرتاب:

تعريف: إذا كانت $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ أو $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ أو

$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ أو $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$

نقول إن المستقيم ذا المعادلة $x = a$ مقارب للمنحنى (C) يوازي محور الأرتاب.

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x-1}}$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f

2. أحسب : $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ واعط تأويلا مبيانيا للنتيجة

أجوبة: 1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x-1 > 0\}$

$x > 1 \Leftrightarrow x-1 > 0$

ومنه : $D_f =]1; +\infty[$

2) $\lim_{x \rightarrow 1^+} 2x = 2$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1} = 0^+$ ومنه : $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$

التأويل المبياني: المستقيم ذا المعادلة $x=1$ مقارب للمنحنى (C) يوازي محور الأرتاب

2) المقارب الموازي لمحور الأفاصيل:

تعريف: إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ (أو $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$) نقول إن

المستقيم ذا المعادلة $y = a$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$ (أو بجوار $-\infty$) يوازي محور الأفاصيل.

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-1}$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f

2. أحسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ واعط تأويلا مبيانيا للنتيجة

أجوبة:

1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 1 \neq 0\}$

$(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$

$x = -1$ أو $x = 1$

ومنه $D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\} =]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$

التأويل المبياني: المستقيم ذا المعادلة $y = a$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$ يوازي محور الأفاصيل.

3) المقارب المائل:

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x بحيث f تقبل نهاية لا منتهية بجوار $+\infty$ (أو بجوار $-\infty$).

تعريف:

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (ax+b) = 0$ (أو

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (ax+b) = 0$) حيث $a \in \mathbb{R}^*$

و $b \in \mathbb{R}$ نقول إن المستقيم ذا المعادلة $y = ax+b$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$ (أو بجوار $-\infty$).

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x^2+x}}$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 1x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 4x - 5} - 1x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 4x - 5} + 1x)(\sqrt{x^2 - 4x - 5} - 1x)}{(\sqrt{x^2 - 4x - 5} + 1x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4x - 5 - x^2}{x(\sqrt{x^2 - 4x - 5} + 1x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x - 5}{x(\sqrt{x^2 - 4x - 5} + 1x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(-4 - \frac{5}{x})}{x(\sqrt{1 - \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2}} + 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4 - \frac{5}{x}}{\sqrt{1 - \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2}} + 1} = \frac{-4}{2} = -2 = b$$

4) ومنه $y = x - 2$ أي $y = ax + b$ مقارب مائل لمنحنى الدالة f بجوار $+\infty$

تمرين 1: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x) = \sqrt{4x^2 + 2x - 2}$

1. حدد D_f و حد $f'(x)$

2. أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

3. بين: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -2$ و أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + 2x$

4. أستنتج معادلة المقارب المائل لمنحنى الدالة f بجوار $-\infty$

أجوبة (1): $D_f = \{x \in \mathbb{R} / 4x^2 + 2x - 2 \geq 0\}$

$$2x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 1 + 8 = 9 = (3)^2 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه الحدودية لها جذرين هما:

$$x_1 = \frac{-1 + 3}{2 \times 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad x_2 = \frac{-1 - 3}{4} = -1 \quad \text{ومنه جدول الاشارة:}$$

x	$-\infty$	-1	$1/2$	$+\infty$
$4x^2 + 2x - 2$	$+$	0	$-$	$+$

ومنه: $D_f =]-\infty; -1] \cup [\frac{1}{2}; +\infty[$

$$\forall x \in]-\infty; -1] \cup [\frac{1}{2}; +\infty[$$

$$f'(x) = (\sqrt{4x^2 + 2x - 2})' = \frac{(4x^2 + 2x - 2)'}{2\sqrt{4x^2 + 2x - 2}} = \frac{8x + 2}{2\sqrt{4x^2 + 2x - 2}} = \frac{4x + 1}{\sqrt{4x^2 + 2x - 2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 + 2x - 2} \quad (2)$$

لدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} 4x^2 + 2x - 2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 4x^2 = +\infty$ ومنه $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 2x - 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 \left(4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}\right)} \quad (3)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} |x| \sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}}$$

لدينا: $x \rightarrow -\infty$ ومنه $|x| = -x$ ومنه

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} = -\sqrt{4} = -2 = a$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + 2x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 + 2x - 2} + 2x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{4x^2 + 2x - 2} + 2x)(\sqrt{4x^2 + 2x - 2} - 2x)}{(\sqrt{4x^2 + 2x - 2} - 2x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + 2x - 2 - 4x^2}{-x \sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 2}{-x \sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 2}{-x \sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} - 2x}$$

2. حدد معادلة المقارب المائل لمنحنى الدالة f بجوار $+\infty$

أجوبة: (1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + x > 0\}$

$$x = -1 \text{ أو } x = 0 \Leftrightarrow x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x = 0$$

نستعمل جدول الاشارة:

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$x^2 + x$	$+$	0	$-$	$+$

ومنه: $D_f =]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$

$$f(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x^2 + x}} \Leftrightarrow f(x) - x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + x}} \quad (2)$$

اذن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + x}}$

لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} = +\infty$ اذن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + x}} = 0$

ومنه: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = 0$

التأويل المبياني: المستقيم ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C)

بجوار $+\infty$

خاصية: يكون المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ ($a \neq 0$) مقاربا مائلا

للمنحنى (C) بجوار $+\infty$ إذا وفقط إذا كان:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b$$

لدينا نفس الخاصية إذا عوضنا x بـ $+\infty$ إلى $+\infty$ بـ x يؤول إلى $-\infty$

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f

2. أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

3. حدد معادلة المقارب المائل لمنحنى الدالة f بجوار $+\infty$

أجوبة (1): $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 4x - 5 \geq 0\}$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times 1 \times (-5) = 16 + 20 = 36 = 6^2 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه الحدودية لها جذرين هما:

$$x_1 = \frac{4 + 6}{2 \times 1} = \frac{10}{2} = 5 \quad x_2 = \frac{4 - 6}{2 \times 1} = \frac{-2}{2} = -1 \quad \text{ومنه جدول الاشارة:}$$

x	$-\infty$	-1	5	$+\infty$
$x^2 - 4x - 5$	$+$	0	$-$	$+$

ومنه: $D_f =]-\infty; -1] \cup [5; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 4x - 5} \quad (2)$$

لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 4x - 5 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ ومنه $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x - 5}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2}\right)} \quad (3)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} |x| \sqrt{1 - \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2}}$$

لدينا: $x \rightarrow +\infty$ ومنه $|x| = x$ ومنه

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 - \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2}} = 1\sqrt{1} = 1 = a$$

نقول إن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجيا اتجاهه المستقيم ذو المعادلة

$$y = ax \text{ بجوار } +\infty.$$

نعرف بالمثل الفروع الشلجية بجوار $-\infty$.
مثال 1: لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي:

$$f(x) = \sqrt{2x-1} - x$$

(1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .

(2) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(3) أدرس الفروع الأتائية لمنحنى الدالة f .

أجوبة: (1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x-1 \geq 0\}$

$$x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x-1 \geq 0$$

ومنه: $D_f = \left[\frac{1}{2}; +\infty \right[$

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x-1} - x$ ش غ م

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x-1} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right)} - x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2} \sqrt{\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right)} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt{\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right)} - x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right)} - 1 \right) = -\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x-1} - x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x-1}}{x} - 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right)}}{x} - 1 \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right)} - 1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (-1x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x-1} = +\infty$$

التأويل المبياني: منحنى (C) يقبل فرعا شلجيا اتجاهه المستقيم ذو المعادلة $y = -x$ بجوار $+\infty$

III. تقرر منحنى-نقط انعطاف:

خاصية: لتكن f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على مجال I و (C_f)

منحناها في المعلم $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

✚ إذا كانت f'' موجبة على المجال I فإن للمنحنى (C_f) تقعرا

موجها نحو محور الأرتيب الموجبة.

✚ إذا كانت f'' سالبة على المجال I فإن للمنحنى (C_f) تقعرا

موجها نحو محور الأرتيب السالبة.

✚ إذا كانت f'' تنعدم في النقطة $x_0 \in I$ وتتغير إشارتها

بجوار x_0 فإن النقطة $A(x_0; f(x_0))$ نقطة انعطاف المنحنى (C_f) .

مثال: نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R}

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - 2x^2 + x + \frac{2}{3} \text{ كالتالي:}$$

1. أحسب $f''(x)$ لكل x من \mathbb{R}

2. أدرس تقرر المنحنى (C_f) الممثل للدالة f مع تحديد نقطتي انعطافه

الجواب: (1)

$$f'(x) = \left(\frac{1}{12}x^4 - 2x^2 + x + \frac{2}{3} \right)' = \frac{1}{12}4x^3 - 4x + 1 = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - 4x + 1 \right)' = x^2 - 4$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right)}{-x \left(\sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} + 2 \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{-\left(\sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} + 2 \right)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = b$$

(4) ومنه: $y = ax + b$ أي $y = 2x - \frac{1}{2}$ مقارب مائل لمنحنى الدالة f بجوار $-\infty$

II. الفروع الشلجية:

لتكن f دالة عددية تقبل نهاية لا منتهية بجوار $+\infty$.

تعريف 1:

■ إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ نقول إن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجيا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$

■ إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ أو $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

نقول أن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجيا اتجاهه محور الأرتيب بجوار $+\infty$.

مثال 1: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x) = \sqrt{2-x}$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f

2. أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

3. أدرس الفرع الشلجي لمنحنى الدالة f بجوار $-\infty$

أجوبة: (1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2-x \geq 0\}$

$$x \leq 2 \Leftrightarrow 2-x \geq 0$$

ومنه: $D_f =]-\infty; 2]$

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ومنه: $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2-x = +\infty$

$$(3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{2-x})^2}{x\sqrt{2-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-x}{x\sqrt{2-x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-x}{x} \times \frac{1}{\sqrt{2-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x} \times \frac{1}{\sqrt{2-x}} = -1 \times 0 = 0$$

التأويل المبياني: منحنى (C) يقبل فرعا شلجيا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار $-\infty$

مثال 2: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x) = x\sqrt{x-1}$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f

2. أدرس الفرع الشلجي لمنحنى الدالة f بجوار $+\infty$

أجوبة: (1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x-1 \geq 0\}$

$$x \geq 1 \Leftrightarrow x-1 \geq 0$$

ومنه: $D_f = [1; +\infty[$

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ومنه: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x-1 = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-1} = +\infty$$

التأويل المبياني: منحنى (C) يقبل فرعا شلجيا اتجاهه محور الأرتيب بجوار $+\infty$

تعريف 2:

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ حيث $(a \in \mathbb{R}^*)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax)) = 0$$

$$(x-2)(x+2)=0 \Leftrightarrow x^2-2^2=0 \Leftrightarrow x^2-4=0 \Leftrightarrow f''(x)=0(2)$$

$$x = -2 \text{ أو } x = 2 \Leftrightarrow$$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
x^2-4	$+$	0	$-$	0

• تقعر (C_f) موجه نحو محور الأرتاب الموجهة على المجال:

$$]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$$

• تقعر (C_f) موجه نحو محور الأرتاب الموجهة على المجال: $[-2; 2]$

يمكن تلخيص النتائج في جدول التقعر

المشتقة الثانية تنعدم وتتغير إشارتها في: $x_0 = -2; x_0 = 2$

اذن هناك نقطتي انعطاف هما: $A(2; f(2))$ و $A(-2; f(-2))$

IV. محور تماثل-مركز تماثل:

خصائص:

لتكن f دالة عددية معرفة على D , و (C) منحناها في معلم متعامد

منظم و a و b عنصرين من \mathbb{R} .

■ يكون المستقيم ذو المعادلة: $x = a$ محور تماثل للمنحنى (C) إذا

وقط إذا كان:

لكل x من D , لدينا: $(2a-x) \in D$ و $f(2a-x) = f(x)$

■ تكون النقطة $\Omega(a; b)$ مركز تماثل للمنحنى (C) إذا و فقط إذا كان:

لكل x من D , لدينا: $(2a-x) \in D$ و

$$f(2a-x) = 2b - f(x)$$

ملحوظة:

■ إذا كانت f دالة زوجية فان محور الأرتاب محور تماثل منحناها (في

معلم متعامد)

■ إذا كانت f دالة فردية فان أصل المعلم مركز تماثل منحناها.

مثال 1: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة

$$\text{كالتالي: } f(x) = \sqrt{x-x^2}$$

1. حدد حيز تعريف الدالة f

2. بين أن المستقيم $x = \frac{1}{2}$ محور تماثل للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f

الجواب:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x-x^2 \geq 0\} \quad f(x) = \sqrt{x-x^2} \quad (1)$$

$$x = 1 \text{ أو } x = 0 \Leftrightarrow x(1-x) = 0 \Leftrightarrow x-x^2 = 0$$

ومنه جدول الإشارة:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x-x^2$	$-$	0	$+$	0

$$\text{ومنه: } D_f = [0, 1]$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ يعني } x = a \quad (2)$$

(أ) نبين أنه: إذا كانت $x \in [0, 1]$ فان: $1-x \in [0, 1]$ ؟؟؟

$$\Leftrightarrow 1-1 \leq 1-x \leq 1+0 \Leftrightarrow -1 \leq -x \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow x \in [0, 1]$$

$$1-x \in [0, 1] \Leftrightarrow 0 \leq 1-x \leq 1 \Leftrightarrow$$

(ب) نبين أن: $f(1-x) = f(x)$ ؟؟؟؟

$$f(1-x) = \sqrt{(1-x)-(1-x)^2} = \sqrt{1-x-(1-2x+x^2)}$$

$$= \sqrt{1-x-1+2x-x^2} = \sqrt{x-x^2} = f(x)$$

ومنه $x = \frac{1}{2}$ محور تماثل لمنحنى الدالة f .

مثال 2: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x

$$\text{المعرفة كالتالي: } f(x) = \frac{x^2-x}{x+1}$$

1. بين أن $\forall x \in D_f \quad f(x) = x-2 + \frac{2}{x+1}$

2. بين أن النقطة $\Omega(-1; -3)$ مركز تماثل لمنحنى الدالة f .

$$\text{الجواب: (1)} \quad x-2 + \frac{2}{x+1} = \frac{(x-2)(x+1)+2}{x+1} = \frac{x^2-x}{x+1} = f(x)$$

$$(2) \quad \Omega(a; b) \quad \Omega(-1; -3)$$

(أ) نبين أنه: إذا كانت $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ فان: $-2-x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ ؟؟؟

$$\Leftrightarrow -2-x \neq -2+1 \Leftrightarrow -x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq -1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$\Leftrightarrow -2-x \in \mathbb{R} - \{-1\} \Leftrightarrow -2-x \neq -1 \Leftrightarrow$$

(ب) نبين أن: $f(-2-x) + f(x) = -6 = 2b$ ؟؟؟؟

$$f(-4-x) + f(x) = -4-x-1 + \frac{1}{-4-x+2} + x-1 + \frac{1}{x+2}$$

$$= -4-2 + \frac{1}{-x-2} + \frac{1}{x+2} = -6 + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} = -6$$

ومنه $\Omega(-2; -3)$ مركز تماثل لمنحنى الدالة f .

V. دراسة بعض الدوال:

1) دراسة دالة حدودية:

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f

2. أدرس زوجية الدالة f

3. أحسب نهايات الدالة f عند محددات D_f

4. أدرس الفروع اللانهائية لمنحنى الدالة f

5. أحسب مشتقة الدالة f و أدرس إشارتها

6. حدد جدول تغيرات الدالة f

7. حدد معادلة لمماس المنحنى (C_f) الممثل للدالة f في

النقطة A التي أفصولها $x_0 = -1$

8. حدد نقط تقاطع المنحنى (C_f) الممثل للدالة مع محوري المعلم.

9. حدد مطايرف الدالة f إذا وجدت

10. أرسم المنحنى (C_f) الممثل للدالة f في معلم متعامد منظم

أجوبة: $D_f = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

(أ) إذا كانت $x \in \mathbb{R}$ فان $-x \in \mathbb{R}$

$$\text{(ب)} \quad f(-x) = \frac{1}{3}(-x)^3 - 4(-x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x = -\left(\frac{1}{3}x^3 - 4x\right) = -f(x)$$

ومنه f دالة فردية

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \quad (3)$$

لأن نهاية دالة حدودية عند مالانهاية هي نهاية حدها الأكبر درجة

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{3}x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}x^2 = +\infty \quad (4)$$

(C_f) يقبل فرعا شلجيميا اتجاهه محور الأرتاب بجوار $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{3}x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{3}x^2 = +\infty$$

(C_f) يقبل فرعا شلجيميا اتجاهه محور الأرتاب بجوار $-\infty$

6. حدد الدالة المشتقة و ادرس إشارتها.

7. أعط جدول تغيرات f على D_f .

8. حدد احداثيات نقط تقاطع المنحني (C_f) الممثل للدالة مع محوري المعلم.

9. أعط معادلة المماس في النقطة ذات الأفصول 0.

10. أنشئ المنحني C_f .

أجوبة:

(1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x+2 \neq 0\}$ ومنه

$D_f = \mathbb{R} - \{-2\} =]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$

(2) نقوم بالقسمة الاقليدية ل x^2+x-1 على $x+2$ فنجد :

$$x^2+x-1 = (x+2)(x-1) + 1$$

$$f(x) = \frac{(x+2)(x-1)+1}{x+2} = \frac{(x+2)(x-1)}{x+2} + \frac{1}{x+2} = x-1 + \frac{1}{x+2}$$

ومنه : $a=1$ و $b=-1$ و $c=1$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2+x-1}{x+2} = \frac{1}{0^-} = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2+x-1}{x+2} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

(4) $x = -2$ مقارب للمنحني (C_f)

$$f(x) - (x-1) = \frac{1}{x+2} \text{ يعني } f(x) = x-1 + \frac{1}{x+2}$$

يعني $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x-1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{+\infty} = 0$ ومنه المستقيم

ذا المعادلة $y = x-1$ مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $+\infty$

ولدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x-1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{-\infty} = 0$ ومنه المستقيم

ذا المعادلة $y = x-1$ مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $-\infty$

$$\Omega(a; b) \quad \Omega(-2; -3) \quad (5)$$

(أ) نبين أنه : اذا كانت $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$ فان : $-4-x \in \mathbb{R} - \{-2\}$ ؟؟؟

$$\Leftrightarrow -4-x \neq -4+2 \Leftrightarrow -x \neq 2 \Leftrightarrow x \neq -2 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{-2\}$$

$$-4-x \in \mathbb{R} - \{-2\} \Leftrightarrow -4-x \neq -2 \Leftrightarrow$$

(ب) نبين أن : $f(-4-x) + f(x) = -6 = 2b$ ؟؟؟

$$f(-4-x) + f(x) = -4-x-1 + \frac{1}{-4-x+2} + x-1 + \frac{1}{x+2}$$

$$= -4-2 + \frac{1}{-x-2} + \frac{1}{x+2} = -6 + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} = -6$$

ومنه $\Omega(-2; -3)$ مركز تماثل منحني الدالة f .

$$\text{يعني } f'(x) = \left(x-1 + \frac{1}{x+2}\right)' = 1 - \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{(x+2)^2 - 1}{(x+2)^2} \quad (6)$$

$$f'(x) = \frac{(x+2)^2 - 1^2}{(x+2)^2} = \frac{(x+2-1)(x+2+1)}{(x+2)^2} = \frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$$

اشارة $f'(x)$ هي اشارة : $(x+1)(x+3)$

$$x = -3 \text{ أو } x = -1 \text{ يعني } x+3=0 \text{ أو } x+1=0$$

جدول الإشارة :

x	$-\infty$	-3	-2	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

(7) جدول تغيرات الدالة :

x	$-\infty$	-3	-2	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	-5	$+\infty$	-1	$+\infty$

(8) (أ) نقط تقاطع (C_f) المنحني الممثل للدالة f مع محور الأفصائل

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - 4x\right)' = \frac{1}{3} \times 3x^2 - 4 = x^2 - 4 \quad (5)$$

$$(x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0$$

$$x = -2 \text{ أو } x = 2 \Leftrightarrow$$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
x^2-4	$+$	0	$-$	0	$+$

(6)

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$16/3$	$-16/3$	$+\infty$	

(7) معادلة لمماس ل (C_f) في النقطة A التي أفصولها $x_0 = -1$

$$f'(-1) = -3 \text{ و } f(-1) = \frac{11}{3} \text{ و } y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

$$y = -3x + \frac{2}{3} \Leftrightarrow y = \frac{11}{3} - 3(x+1) \Leftrightarrow y = f(-1) + f'(-1)(x+1)$$

(8) (أ) نقط تقاطع (C_f) المنحني الممثل للدالة f مع محور الأفصائل

نحل فقط المعادلة : $f(x) = 0$ يعني $\frac{1}{3}x^3 - 4x = 0$

$$\frac{1}{3}x^2 - 4 = 0 \text{ أو } x = 0 \text{ يعني } x\left(\frac{1}{3}x^2 - 4\right) = 0$$

$$\text{يعني } x = 0 \text{ أو } x^2 = 12 \text{ أو } x = \sqrt{12} \text{ أو } x = -\sqrt{12}$$

$$\text{يعني } x = 0 \text{ أو } x = 2\sqrt{3} \text{ أو } x = -2\sqrt{3}$$

ومنه نقط التقاطع هم : $A(2\sqrt{3}; 0)$ و $B(-2\sqrt{3}; 0)$ و $O(0; 0)$

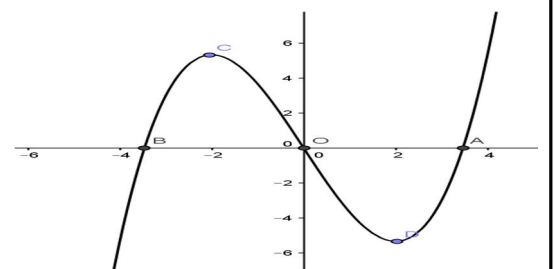
(ب) نقط تقاطع (C_f) المنحني الممثل للدالة f مع محور الأرتاب

نحسب فقط : $f(0)$ لدينا $f(0) = 0$ ومنه نقطة التقاطع هي : $O(0; 0)$

$$f(2) = -\frac{16}{3} \text{ هي قيمة دنيا للدالة } \quad (9)$$

$$f(-2) = \frac{16}{3} \text{ هي قيمة قصوى للدالة } \quad (10)$$

(10) التمثيل المبياني للدالة f



2) دراسة دالة جذرية:

مثال: لتكن f دالة عددية معرفة بما يلي : $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x+2}$

1. حدد مجموعة تعريف الدالة D_f

2. حدد الأعداد الحقيقية a و b و c بحيث

$$\forall x \in D_f \quad f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$$

3. أحسب النهايات عند محداث D_f

4. أدرس الفروع اللانهائية لمنحني الدالة f

(تحديد معادلة المقاربات و المقاربات المائلة ل (C_f) .)

5. بين أن النقطة $\Omega(-2; -3)$ مركز تماثل منحني الدالة f .

وأنشئ (C_f) و $(C_{f^{-1}})$ منحنى الدالة f^{-1} في نفس المعلم

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 1-x \geq 0\} \text{ (أجوبة : 1)}$$

$$x \leq 1 \Leftrightarrow 1-x \geq 0$$

$$D_f =]-\infty; 1]$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ ومنه: } \lim_{x \rightarrow -\infty} 1-x = +\infty \text{ (ب)}$$

ج) دراسة قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار عند $x_0 = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(\sqrt{1-x})^2}{(x-1)\sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x}{(x-1)\sqrt{1-x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x}{(x-1)\sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{\sqrt{1-x}} = -\infty$$

ومنه f غير قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0 = 1$:

ومبانيا نقول ان منحنى الدالة f يقبل نصف مماس يوازي محور الأرتيب

على يسار النقطة: $A(1; f(1))$ أي $A(1; -1)$ وموجه نحو الأعلى

$$\forall x \in]-\infty; 1] f'(x) = (-1 + \sqrt{1-x})' = 0 + \frac{(1-x)'}{2\sqrt{1-x}} = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} < 0 \quad (2)$$

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	1
$f'(x)$		-
$f(x)$		$-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1 + \sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x} + \frac{\sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x} + \frac{(\sqrt{1-x})^2}{x\sqrt{1-x}} \quad (3)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x} + \frac{1-x}{x\sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x} + \frac{1-x}{x} \times \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x} + \frac{-x}{x} \times \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 0 - 1 \times 0 = 0$$

التأويل المبياني: منحنى (C) يقبل فرعا شلجيميا اتجاهه محور

الأفاصيل بجوار $-\infty$

4) أ) f دالة متصلة على المجال $I =]-\infty; 1]$ و f تناقصية قطعاً

ومنه f تقبل دالة عكسية معرفة

$$J = f(I) = f(]-\infty; 1]) = [-1; +\infty[$$

$$\begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in f(I) \end{cases} \text{ (ب)}$$

$$-1 + \sqrt{1-y} = x \text{ يعني } \begin{cases} f(y) = x \\ y \in]-\infty; 1] \end{cases}$$

$$\sqrt{1-y} = x+1 \quad 2y-1 = x^2 \text{ يعني}$$

$$y = 1 - (x+1)^2 \text{ يعني } 1-y = (x+1)^2 \text{ يعني } (\sqrt{1-y})^2 = (x+1)^2$$

$$y = -x^2 - 2x \text{ يعني}$$

$$\forall x \in [-1; +\infty[f^{-1}(x) = -x^2 - 2x \text{ ومنه}$$

(ج) (4)

x	-8	-3	0	1
$f(x)$	2	1	0	-1

$$\text{نحل فقط المعادلة: } f(x) = 0 \text{ يعني } \frac{x^2 + x - 1}{x+2} = 0$$

$$\text{يعني } x^2 + x - 1 = 0$$

نحل المعادلة باستعمال المميز

$$c = -1 \text{ و } b = 1 \text{ و } a = 1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ و } x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ و } x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

ومنه نقط التقاطع هما: $B\left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}; 0\right)$ أو $A\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; 0\right)$

(ب) نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأرتيب

نحسب فقط: $f(0)$: لدينا $f(0) = \frac{1}{2}$ ومنه نقطة التقاطع هي: $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

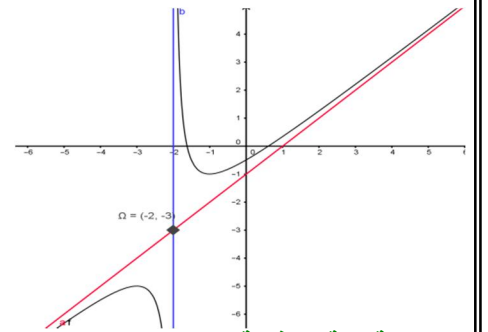
(9) معادلة المماس في النقطة ذات الأفصول 2.

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (2)$$

$$f(0) = -\frac{1}{2} \text{ و } f'(0) = \frac{(0+1)(0+3)}{(0+2)^2} = \frac{3}{4}$$

$$y = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4}x \Leftrightarrow y = f(0) + f'(0)(x - 0)$$

(10) التمثيل المبياني للدالة:



(3) دراسة دالة لاجذرية:

مثال: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي:

$$f(x) = -1 + \sqrt{1-x}$$

ليكن (C_f) الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم (o, \vec{i}, \vec{j})

(1) أ) حدد D_f حيز تعريف الدالة f (ب) حدد $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ج) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار عند $x_0 = 1$ وأعط تأويلا

هندسيا للنتيجة المحصل عليها.

(2) أدرس تغيرات الدالة f و حدد جدول تغيرات الدالة f

(3) أدرس الفروع اللانهائية لمنحنى الدالة f

(4) أبين أن الدالة f تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J

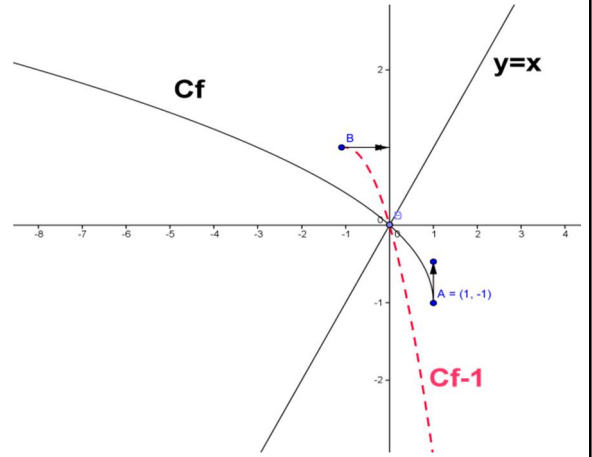
يجب تحديده

(ب) حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J

(ج) املأ الجدول التالي

x	-8	-3	0	1
$f(x)$				

منحنى الدالة f^{-1} هو مماثل لمنحنى الدالة f بالنسبة للمستقيم $y = x$ في معلم متعامد ممنظم



تمرين: للبحث نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي :

$$f(x) = \sqrt{x-2x^2} \quad \text{ليكن } (C_f) \text{ الممثل للدالة } f$$

في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) بحيث $\|\vec{i}\| = 8\text{cm}$

- (1) حدد D_f حيز تعريف الدالة f
- (2) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين عند $x_0 = 0$ وعلى اليسار عند $x_0 = 2$ وأعط تأويلا هندسيا للنتائج المحصل عليها
- (3) بين أن المستقيم ذا المعادلة $x = \frac{1}{4}$ محور تماثل للمنحنى (C_f)
- (4) أنشئ (C_f) بين أن قصور الدالة f على المجال $I = \left[0; \frac{1}{4}\right]$ تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يجب تحديده وحدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J

مثال: لتكن f دالة عددية معرفة بما يلي: $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f
2. أدرس زوجية الدالة f
3. أحسب النهايات عند محداث D_f
4. أدرس الفروع اللانهائية لمنحنى الدالة f (تحديد معادلة المقاربات و المقاربات المائلة ل (C_f)).
5. بين أن النقطة $\Omega(-2; -3)$ مركز تماثل منحنى الدالة f .
6. حدد الدالة المشتقة و ادرس إشارتها.
7. أعط جدول تغيرات f على D_f .
8. حدد احداثيات نقط تقاطع المنحنى (C_f) الممثل للدالة مع محوري المعلم.
9. أعط معادلة المماس في النقطة ذات الأفضول 0.
10. أنشئ المنحنى C_f .

أجوبة:

$$D_f = \mathbb{R} - \{-2\} =]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[\quad \text{ومنه } D_f = \{x \in \mathbb{R} / x+2 \neq 0\} \quad (1)$$

(2) نقوم بالقسمة الاقليدية ل x^2+x-1 على $x+2$ فنجد: $x^2+x-1 = (x+2)(x-1)+1$

$$\text{اذن: } f(x) = \frac{(x+2)(x-1)+1}{x+2} = \frac{(x+2)(x-1)}{x+2} + \frac{1}{x+2} = x-1 + \frac{1}{x+2}$$

ومنه: $a=1$ و $b=-1$ و $c=1$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2+x-1}{x+2} = \frac{1}{0^-} = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2+x-1}{x+2} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

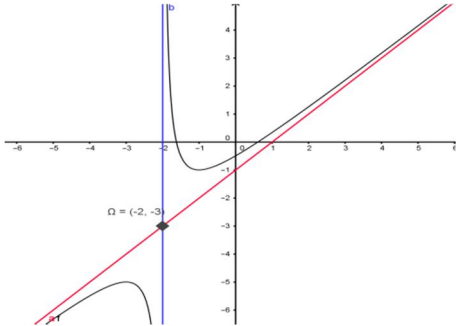
(4) $x = -2$ مقارب للمنحنى (C_f)

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (2)$$

$$f(0) = -\frac{1}{2} \text{ و } f'(0) = \frac{(0+1)(0+3)}{(0+2)^2} = \frac{3}{4}$$

$$y = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4}x \Leftrightarrow y = f(0) + f'(0)(x - 0)$$

(10) التمثيل المبياني للدالة :



$$f(x) - (x-1) = \frac{1}{x+2} \text{ يعني } f(x) = x-1 + \frac{1}{x+2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x-1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{+\infty} = 0 \text{ يعني}$$

منه المستقيم $y = x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x-1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{-\infty} = 0 \text{ ومنه المستقيم}$$

منه المستقيم $y = x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

$$\Omega(a; b) \quad \Omega(-2; -3) \quad (5)$$

(أ) نبين أنه : اذا كانت $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$ فان : $-4 - x \in \mathbb{R} - \{-2\}$ ؟؟؟

$$\Leftrightarrow -4 - x \neq -4 + 2 \Leftrightarrow -x \neq 2 \Leftrightarrow x \neq -2 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{-2\}$$

$$-4 - x \in \mathbb{R} - \{-2\} \Leftrightarrow -4 - x \neq -2 \Leftrightarrow$$

(ب) نبين أن : $f(-4-x) + f(x) = -6 = 2b$ ؟؟؟؟

$$f(-4-x) + f(x) = -4 - x - 1 + \frac{1}{-4 - x + 2} + x - 1 + \frac{1}{x + 2}$$

$$= -4 - 2 + \frac{1}{-x - 2} + \frac{1}{x + 2} = -6 + \frac{1}{x + 2} - \frac{1}{x + 2} = -6$$

ومنه $\Omega(-2; -3)$ مركز تماثل منحنى الدالة f .

$$\text{يعني } f'(x) = \left(x - 1 + \frac{1}{x + 2}\right)' = 1 - \frac{1}{(x + 2)^2} = \frac{(x + 2)^2 - 1}{(x + 2)^2} \quad (6)$$

$$f'(x) = \frac{(x + 2)^2 - 1^2}{(x + 2)^2} = \frac{(x + 2 - 1)(x + 2 + 1)}{(x + 2)^2} = \frac{(x + 1)(x + 3)}{(x + 2)^2}$$

اشارة $f'(x)$ هي اشارة : $(x + 1)(x + 3)$

$$(x + 1)(x + 3) = 0 \text{ يعني } x + 1 = 0 \text{ أو } x + 3 = 0 \text{ يعني } x = -1 \text{ أو } x = -3$$

جدول الإشارة :

x	$-\infty$	-3	-2	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

(7) جدول تغيرات الدالة :

x	$-\infty$	-3	-2	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	-5	$+\infty$	-1	$+\infty$

(8) (أ) نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاصيل

$$\text{نحل فقط المعادلة : } f(x) = 0 \text{ يعني } \frac{x^2 + x - 1}{x + 2} = 0$$

$$\text{يعني } x^2 + x - 1 = 0$$

نحل المعادلة باستعمال المميز

$$a = 1 \text{ و } b = 1 \text{ و } c = -1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما :

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ و } x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ و } x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{ومنه نقط التقاطع هما : } A\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; 0\right) \text{ أو } B\left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}; 0\right)$$

(ب) نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأرتاب

$$\text{نحسب فقط : } f(0) \text{ لدينا } f(0) = -\frac{1}{2} \text{ ومنه نقطة التقاطع هي : } \left(0; -\frac{1}{2}\right)$$

(9) معادلة المماس في النقطة ذات الأفاصول 2.