

**مذكرة رقم 4 في درس تحليلية الجداء السلمي وتطبيقاته**

الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس :

توجيهات تربوية	القدرات المنتظرة	محتوى البرنامج
<p>- تعتبر الدراسة التحليلية لدائرة مجالا خصبا لتوظيف تحليلية الجداء السلمي خاصة منها تلك المتعلقة بالمسافة والتعامد، لذا ينبغي الحرص على إبراز دور الطريقة التحليلية في حل بعض المسائل الهندسية.</p> <p>- ينبغي استعمال الجداء السلمي في تحديد معادلة ديكارتية لدائرة؛</p> <p>- يتم التطرق من خلال أنشطة إلى دائرة محددة بثلاث نقط غير مستقيمة؛</p> <p>- يتم بهذه المناسبة، استغلال التجويز التحليلي للمستوى لتقديم نماذج للحل المبياني لبعض المترجمات غير الخطية بمجهولين.</p>	<p>- التعبير عن توازي وتعامد مستقيمين؛</p> <p>- حساب قياسات زوايا ومساحات باستعمال الجداء السلمي.</p> <p>- التعرف على مجموعة النقط من المستوى التي تحقق العلاقة: <math>MA \cdot MB = 0</math></p> <p>- تحديد مركز وشعاع دائرة معرفة بمعادلتها الديكارتية؛</p> <p>- المرور من معادلة ديكارتية إلى تمثيل بارامترى والعكس؛</p> <p>- استعمال تحليلية الجداء السلمي في حل مسائل هندسية وجبرية.</p>	<p>3.1. الصيغة التحليلية للجداء السلمي في معلم متعامد منظم؛</p> <p>- الصيغة التحليلية لمنظم متجهة ولمسافة نقطتين؛</p> <p>- صيغة <math>\cos \theta</math> وصيغة <math>\sin \theta</math>؛</p> <p>3.2. المستقيم في المستوى (دراسة تحليلية):</p> <p>- المتجهة المنظمة لمستقيم؛</p> <p>- معادلة ديكارتية لمستقيم محدد بنقطة ومتجهة منظمية له؛</p> <p>- مسافة نقطة عن مستقيم.</p> <p>3.3. الدائرة (دراسة تحليلية)</p> <p>- معادلة ديكارتية لدائرة؛</p> <p>- تمثيل بارامترى لدائرة؛</p> <p>- دراسة مجموعة النقط: <math>\{M(x; y) / x^2 + y^2 + ax + by + c = 0\}</math>.</p> <p>- دراسة الأوضاع النسبية لدائرة ومستقيم؛</p> <p>- معادلة ديكارتية لمستقيم مماس لدائرة في نقطة معلومة من الدائرة.</p>

<p>مثال نعتبر المتجهات</p> $\vec{w} = 5\vec{i} + 3\vec{j} \text{ و } \vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j} \text{ و } \vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$ <p>أحسب الجداءات السلمية التالية : <math>\vec{u} \cdot \vec{v}</math> و <math>\vec{v} \cdot \vec{w}</math> و <math>\vec{u} \cdot \vec{w}</math></p> <p><b>الجواب :</b> <math>\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 2 + 2 \times (-1) = 0</math> إذن <math>\vec{u} \perp \vec{v}</math></p> $\vec{u} \cdot \vec{w} = 1 \times 5 + 3 \times 2 = 11 \text{ و } \vec{v} \cdot \vec{w} = 2 \times 5 + 3 \times (-1) = 7$ <p><b>تمرين 1:</b> حدد قيمة العدد الحقيقي <math>m</math> لكي تكون المتجهتان <math>\vec{u}(3; -1+m)</math> و <math>\vec{v}(2-m; 5)</math> متعامدتين</p> <p><b>الجواب :</b> <math>\vec{u} \perp \vec{v}</math> يعني <math>\vec{u} \cdot \vec{v} = 0</math> يعني <math>3(2-m) + 5 \times (-1+m) = 0</math></p> $m = -\frac{1}{2} \text{ يعني } 2m + 1 = 0 \text{ يعني } 6 - 3m - 5 + 5m = 0$ <p><b>تمرين 2:</b> حدد قيمة العدد الحقيقي <math>m</math> لكي تكون المتجهتان <math>\vec{u}(-1+m; 2)</math> و <math>\vec{v}(2-m; \frac{1}{2})</math> متعامدتين</p> <p><b>الجواب :</b> <math>\vec{u} \perp \vec{v}</math> يعني <math>\vec{u} \cdot \vec{v} = 0</math> يعني <math>(-1+m)(2-m) + 2 \times \frac{1}{2} = 0</math></p> $-m^2 + 3m - 1 = 0 \text{ يعني } -2 + m + 2m - m^2 + 1 = 0$ <p>يعني <math>m^2 - 3m + 1 = 0</math> نحسب مميز المعادلة ونجد : <math>\Delta = 5</math> ومنه للمعادلة حلين هما : <math>m_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}</math> و <math>m_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}</math></p> <p><b>2. الصيغة التحليلية لمنظم متجهة والمسافة بين نقطتين</b></p> <p><b>(a) منظم متجهة:</b></p> <p>لتكن <math>\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}</math> منظم المتجهة <math>\vec{u}</math> نرسم له بالرمز <math>\ \vec{u}\  = \sqrt{x^2 + y^2}</math></p> <p><b>(b) المسافة بين نقطتين:</b></p>	<p><b>I. الصيغة التحليلية للجداء السلمي في معلم متعامد منظم</b></p> <p><b>1. الصيغة التحليلية للجداء السلمي في معلم متعامد منظم</b></p> <p><b>تعريف:</b> ليكن <math>(\vec{i}; \vec{j})</math> أساسا في المستوى و <math>O</math> نقطة من المستوى</p> <p>• نقول إن <math>(\vec{i}; \vec{j})</math> أساس متعامد منظم إذا كان :</p> $\ \vec{i}\  = 1 \text{ و } \ \vec{j}\  = 1 \text{ و } \vec{i} \cdot \vec{j} = 0$ <p>• نقول إن المعلم <math>(0; \vec{i}; \vec{j})</math> متعامد منظم إذا كان <math>(\vec{i}; \vec{j})</math> أساسا متعامدا منظمًا</p> <p>• إذا كان <math>(\vec{i}; \vec{j})</math> أساس متعامد منظم و <math>\frac{\pi}{2} [2\pi]</math> فنقول إن <math>(0; \vec{i}; \vec{j})</math> معلم متعامد منظم ومباشر</p> <p>دائمًا في جميع فقرات الدرس ننسب المستوى إلى معلم متعامد منظم ومباشر <math>(0; \vec{i}; \vec{j})</math></p> <p><b>نشاط :</b> لتكن <math>\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}</math> و <math>\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}</math> متجهتين من <math>(0; \vec{i}; \vec{j})</math> معلم متعامد منظم ومباشر أحسب : <math>\vec{u} \cdot \vec{v}</math></p> <p><b>الجواب:</b></p> $\vec{u} \cdot \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j}) = xx'\vec{i} \cdot \vec{i} + xy'\vec{i} \cdot \vec{j} + yx'\vec{j} \cdot \vec{i} + yy'\vec{j} \cdot \vec{j}$ $\vec{j} \cdot \vec{j} = \ \vec{j}\  \times \ \vec{j}\  \times \cos 0 = 1 \times 1 \times 1 = 1 \text{ و } \vec{i} \cdot \vec{i} = \ \vec{i}\  \times \ \vec{i}\  \times \cos 0 = 1 \times 1 \times 1 = 1$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' \text{ ومنه : } \vec{i} \cdot \vec{j} = \ \vec{i}\  \times \ \vec{j}\  \times \cos \frac{\pi}{2} = 1 \times 1 \times 0 = 0$ <p><b>خاصية 1:</b> لتكن <math>\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}</math> و <math>\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}</math> متجهتين من المستوى ، لدينا : <math>\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'</math></p> <p><b>خاصية 2:</b> تكون المتجهتان <math>\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}</math> و <math>\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}</math> متعامدتين إذا وفقط إذا كان : <math>\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' = 0</math></p>
--	---

**تمرين 5:** نعتبر في المستوى المنحني المتجهتين التاليتين :

$$\vec{u}(-1; -1) \text{ و } \vec{v}(-2; 0)$$

1. أحسب :  $\sin(\widehat{u;v})$  و  $\cos(\widehat{u;v})$

2. استنتج قياسا للزاوية الموجهة  $(\widehat{u;v})$

**الأجوبة:**

$$\cos(\widehat{u;v}) = \frac{2}{\sqrt{2} \times 2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos(\widehat{u;v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{x'^2 + y'^2}} \quad (1)$$

$$\sin(\widehat{u;v}) = \frac{-2}{\sqrt{2} \times 2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin(\widehat{u;v}) = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}}{\sqrt{2} \times 2}$$

(2) لدينا  $\cos(\widehat{u;v}) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4}$  و  $\sin(\widehat{u;v}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\sin \frac{\pi}{4} = \sin(-\frac{\pi}{4})$

ومنه  $\frac{\pi}{4}$  هو قياس للزاوية الموجهة  $(\widehat{u;v})$

**تمرين 6:** نعتبر في المستوى المنحني النقاط التالية :

$$A(3; 3) \text{ و } B(1; 1) \text{ و } C(1; 3)$$

1. أحسب :  $\cos(\widehat{AB;AC})$  و  $\sin(\widehat{AB;AC})$

2. استنتج قياسا للزاوية الموجهة  $(\widehat{AB;AC})$

$$\cos(\widehat{AB;AC}) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{\|\overline{AB}\| \times \|\overline{AC}\|} = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{x'^2 + y'^2}} \quad (1) \text{ **الأجوبة:** }$$

$$\overline{AB}(-2, -2) \text{ و } \overline{AC}(-2, 0) \text{ ومنه } \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 4$$

$$\cos(\widehat{AB;AC}) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{\|\overline{AB}\| \times \|\overline{AC}\|} = \frac{4}{\sqrt{8} \times \sqrt{4}} = \frac{4}{2\sqrt{2} \times 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin(\widehat{AB;AC}) = \frac{-4}{2\sqrt{2} \times 2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin(\widehat{AB;AC}) = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}}{2\sqrt{2} \times 2}$$

(2) لدينا  $\cos(\widehat{AB;AC}) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4}$

و  $\sin(\widehat{AB;AC}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\sin \frac{\pi}{4} = \sin(-\frac{\pi}{4})$

ومنه  $\frac{\pi}{4}$  هو قياس للزاوية الموجهة  $\widehat{AB;AC}$

**تمرين 7:** نعتبر في المستوى المنحني النقاط التالية :

$$A(4; 1) \text{ و } B(0; 5) \text{ و } C(-2; -1)$$

1. أحسب المسافات:  $AB$  و  $AC$  و  $BC$

ثم استنتج طبيعة المثلث  $ABC$

2. أحسب :  $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$

3. استنتج أن :  $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{1}{\sqrt{5}}$

4. أحسب  $\det(\overline{AB;AC})$  و استنتج أن :  $\sin(\widehat{BAC}) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (4)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \quad (1) \text{ **الأجوبة:** }$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

ومنه  $AC = BC$  ومنه  $ABC$  متساوي الساقين

$$\overline{AB}(-4, 4) \text{ و } \overline{AC}(-6, -2) \text{ ومنه } \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 24 - 8 = 16 \quad (2)$$

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{\|\overline{AB}\| \times \|\overline{AC}\|} = \frac{16}{\sqrt{32} \times \sqrt{40}} = \frac{16}{4\sqrt{2} \times 2\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{20}}{20} = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad (3)$$

$$\det(\overline{AB;AC}) = \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 32 \quad (4)$$

لتكن  $A(x_A; y_A)$  و  $B(x_B; y_B)$  نقطتين من المستوى , المسافة هي :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$\|\overline{AB}\| = AB \text{ **ملاحظة:** }$$

**مثال أو تمرين 3:** نعتبر في المستوى المنحني النقاط التالية :

$$A(-1; 3) \text{ و } B(3; \sqrt{5}) \text{ و } C(2; -3) \text{ و المتجهة } \vec{u}(\sqrt{5}; -2)$$

1) أحسب  $AC$  و  $\|\vec{u}\|$  و  $\overline{AB} \cdot \overline{CB}$  أحسب (2)

(3) ماذا تستنتج بالنسبة للمثلث  $ABC$

**الأجوبة:**

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(2+1)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} \quad (1)$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + (-2)^2} = \sqrt{5+4} = \sqrt{9} = 3$$

$$\overline{AB}(4; \sqrt{5}-3) \text{ يعني } \overline{AB}(3-(-1); \sqrt{5}-3) \quad (2)$$

$$\overline{CB}(1; \sqrt{5}+3) \text{ يعني } \overline{CB}(3-2; \sqrt{5}+3)$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{CB} = 1 \times 4 + (\sqrt{5}-3)(\sqrt{5}+3) = 4 + ((\sqrt{5})^2 - 3^2) = 0$$

(3) نستنتج أن المثلث  $ABC$  قائم الزاوية في  $B$

**تمرين 4:** نعتبر في المستوى المنحني النقاط التالية :  $A(3; 2)$  و  $B(-\frac{1}{2}; 0)$

$$C(-1; -4) \text{ و } D(\frac{5}{2}; -2) \text{ و } E(1; -1)$$

1. بين أن المثلث  $ABE$  قائم الزاوية في النقطة  $E$

2. بين أن الرباعي  $ABCD$  معين

(يكفي أن نبين أن  $ABCD$  متوازي الأضلاع و ضلعين متتاليين متقايسين أو نبين أن القطرين متعامدين)

**الأجوبة:** (1) يكفي أن نبين أن  $\overline{AE} \perp \overline{EB}$  أي نبين أن  $\overline{AE} \cdot \overline{EB} = 0$

$$\overline{AE}(-2; -3) \text{ و } \overline{EB}(-\frac{3}{2}; 1)$$

ومنه  $\overline{AE} \cdot \overline{EB} = 3 - 3 = 0$  أي  $\overline{AE} \perp \overline{EB}$  قائم الزاوية في النقطة  $E$

(2) طريقة 1: نبين أن  $ABCD$  متوازي الأضلاع و ضلعين متتاليين متقايسين

$$\text{لدينا: } \overline{DC}(-\frac{7}{2}; -2) \text{ و } \overline{AB}(-\frac{7}{2}; -2) \text{ اذن } \overline{AB} = \overline{DC}$$

ومنه  $ABCD$  متوازي الأضلاع

$$\text{ولدينا كذلك: } AC = \sqrt{(\frac{7}{2})^2 + (1-1)^2} = \sqrt{\frac{49}{4} + 4} = \sqrt{\frac{65}{4}} \text{ و } BC = \sqrt{\frac{1}{4} + 16} = \sqrt{\frac{65}{4}}$$

اذن  $AB = BC$  ومنه  $ABCD$  معين

طريقة 2: نبين أن القطرين متعامدين

$$\text{لدينا: } \overline{AC}(-4; -6) \text{ و } \overline{BD}(3; -2)$$

$$\text{اذن: } \overline{AC} \cdot \overline{BD} = -12 + 12 = 0$$

ومنه  $\overline{AC} \perp \overline{BD}$  وبالتالي:  $ABCD$  معين

**(c) صيغة  $\sin$  و  $\cos$ :**

لتكن  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$  و  $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$  متجهتين غير منعدمتين من

$$\text{المستوى و } \theta \text{ قياسا للزاوية الموجهة } (\widehat{u;v})$$

$$\text{لدينا: } \sin(\widehat{u;v}) = \frac{\det(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{xy' - yx'}{\sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

$$\text{و } \cos(\widehat{u;v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

$$\sin(\widehat{AB;AC}) = \frac{32}{8\sqrt{20}} = \frac{32\sqrt{20}}{160} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow \sin(\widehat{AB;AC}) = \frac{-4}{8\sqrt{20}} \begin{matrix} -4 & -6 \\ 4 & -2 \end{matrix}$$

## II. المستقيم في المستوى (دراسة تحليلية)

### 1. متجهة منظمه على مستقيم في المستوى

**تعريف:** ليكن  $(D)$  مستقيم في المستوى

نسمي متجهة منظمه على المستقيم  $(D)$  , كل متجهة غير منعدمة ومتعامدة مع متجهة موجهة للمستقيم  $(D)$

$ax+by+c=0$  متجهة منظمه على المستقيم  $(D)$  هي:  $\vec{n}(a;b)$

**أمثلة:** أعط متجهة منظمه على المستقيم  $(D)$  في كل حالة من الحالات التالية:

$$(1) (D): x-1=0 \quad (2) (D): x-2y+5=0$$

$$(3) (D): 2y-3=0$$

### الأجوبة:

متجهة منظمه على المستقيم  $ax+by+c=0$   $(D)$  هي:  $\vec{n}(a;b)$

$$(1) (D): x-2y+5=0 \quad \vec{n}(2;1) \text{ متجهة منظمه على } (D)$$

$$(2) (D): 0x+2y-3=0 \quad \vec{n}(-2;0) \text{ متجهة منظمه على } (D)$$

$$(3) (D): 1x+0y-1=0 \quad \vec{n}(0;1) \text{ متجهة منظمه على } (D)$$

### 2. معادلة مستقيم معرف بنقطة و متجهة منظمه:

**خاصية:** معادلة المستقيم  $(D)$  المار من النقطة  $A(x_A; y_A)$  و  $\vec{n}(a;b)$  متجهة منظمه عليه هي:  $a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$

**مثال:** حدد معادلة المستقيم  $(D)$  المار من النقطة  $A(1;2)$  و  $\vec{n}(2;-3)$  متجهة منظمه عليه

الجواب: هناك طريقتين يمكن استعمالهما

**طريقة 1:**  $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \vec{AM} \perp \vec{n} \Leftrightarrow M(x;y) \in (D)$

لدينا  $\vec{AM}(x-1, y-2)$  و  $\vec{n}(2;-3)$

$$\Leftrightarrow 2(x-1)-3(y-2)=0 \Leftrightarrow (D)/2x-3y+4=0$$

**طريقة 2:** نعلم أن معادلة مستقيم تكتب على الشكل:

$$(D)/ax+by+c=0 \quad \vec{n}(a;b) \text{ متجهة منظمه عليه}$$

نعلم أن:  $\vec{n}(2;-3)$  متجهة منظمه على  $(D)$

$$\text{اذن: } a=2; b=-3 \text{ ومنه المعادلة تصبح: } (D)/2x-3y+c=0$$

ونعلم أن:  $A(1;2) \in (D)$  اذن احداثياته تحقق المعادلة يعني:

$$2 \times 1 - 3 \times 2 + c = 0 \text{ يعني } c = 4 \text{ ومنه: } (D)/2x-3y+4=0$$

**تمرين 8:** نعتبر في المستوى النقطة التالية:

$$A(1;2) \quad B(-2;3) \quad C(0;4)$$

1. حدد معادلة المستقيم  $(D)$  واسط القطعة  $[AB]$

2. حدد معادلة  $(\Delta)$  ارتفاع المثلث  $ABC$  و المار من النقطة  $A$

**الجواب:** 1) واسط القطعة  $[AB]$  هو مستقيم عمودي

على  $(AB)$  ويمر من منتصف القطعة  $[AB]$

نعلم أن معادلة مستقيم تكتب على الشكل:

$$(D)/ax+by+c=0 \quad \vec{AB}(a;b) \text{ متجهة منظمه على } (D)$$

ولدينا:  $\vec{AB}(-3,1)$  متجهة منظمه على  $(D)$  اذن:  $a=-3; b=1$

$$\text{ومن المعادلة تصبح: } (D)/-3x+y+c=0$$

ونعلم أن:  $I \in (D)$  علينا أولاً حساب احداثيات  $I$

$$I\left(\frac{-1}{2}, \frac{5}{2}\right) \text{ يعني } I\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$$

$I \in (D)$  اذن احداثيات  $I$  تحقق المعادلة يعني:

$$-3\left(\frac{-1}{2}\right) + \frac{5}{2} + c = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} + c = 0 \Leftrightarrow c = -4 \text{ ومنه: } (D)/-3x+y-4=0$$

(2)  $(\Delta)$  ارتفاع المثلث  $ABC$  و المار من النقطة  $A$

يعني  $(\Delta)$  عمودي على  $(BC)$  ويمر من  $A$

ومنه:  $\vec{BC}(2,1)$  متجهة منظمه على  $(\Delta)$

نعلم أن معادلة مستقيم تكتب على الشكل:

$$(D)/ax+by+c=0 \quad \vec{BC}(a,b) \text{ متجهة منظمه على } (\Delta)$$

اذن:  $a=2; b=1$  ومنه المعادلة تصبح:  $(\Delta)/2x+y+c=0$

ونعلم أن:  $A \in (\Delta)$  اذن احداثيات  $A$  تحقق المعادلة يعني:

$$2 \times 1 + 2 + c = 0 \Leftrightarrow c = -4 \text{ ومنه: } (\Delta)/2x+y-4=0$$

**تمرين 9:** نعتبر في المستوى النقطة التالية:

$$A(1;1) \quad B(-2;0) \quad C(3;5)$$

1. حدد معادلة المستقيم  $(D)$  واسط القطعة  $[AC]$

2. حدد معادلة  $(\Delta)$  ارتفاع المثلث  $ABC$  و المار من النقطة  $C$

**الجواب:** 1) واسط القطعة  $[AC]$  هو مستقيم عمودي

على  $(AC)$  ويمر من منتصف القطعة  $[AC]$

نعلم أن معادلة مستقيم تكتب على الشكل:

$$(D)/ax+by+c=0 \quad \vec{AC}(a,b) \text{ متجهة منظمه على } (D)$$

ولدينا:  $\vec{AC}(2,4)$  متجهة منظمه على  $(D)$  اذن:  $a=2; b=4$

$$\text{ومن المعادلة تصبح: } (D)/2x+4y+c=0$$

ونعلم أن:  $I \in (D)$  علينا أولاً حساب احداثيات  $I$

$$I\left(\frac{x_A+x_C}{2}, \frac{y_A+y_C}{2}\right) \text{ يعني } I(2,3)$$

$I \in (D)$  اذن احداثيات  $I$  تحقق المعادلة يعني:

$$2 \times 2 + 4 \times 3 + c = 0 \Leftrightarrow c = -16 \text{ ومنه: } (D)/2x+4y-16=0$$

$$(2) (\Delta) \text{ ارتفاع المثلث } ABC \text{ و المار من النقطة } C$$

يعني  $(\Delta)$  عمودي على  $(AB)$  ويمر من  $C$

ومنه:  $\vec{AB}(-3,-1)$  متجهة منظمه على  $(\Delta)$

نعلم أن معادلة مستقيم تكتب على الشكل:

$$(D)/ax+by+c=0 \quad \vec{AB}(a,b) \text{ متجهة منظمه على } (\Delta)$$

اذن:  $a=-3; b=-1$  ومنه المعادلة تصبح:  $(\Delta)/-3x-y+c=0$

ونعلم أن:  $C \in (\Delta)$  اذن احداثيات  $C$  تحقق المعادلة يعني:

$$-3 \times 3 - 5 + c = 0 \Leftrightarrow c = 14 \text{ ومنه: } (\Delta)/-3x-y+14=0$$

### 3. تعامد مستقيمين:

**خاصية:** ليكن  $(D)$  و  $(D')$  مستقيمين معادلاتهما

على التوالي:  $ax+by+c=0$  و  $a'x+b'y+c'=0$

يكون المستقيمان  $(D)$  و  $(D')$  متعامدين إذا كانت

متجهتهما المنظمتان عليهما متعامدتان أي:  $aa'+bb'=0$

**تمرين 10:** نعتبر في المستوى المستقيمين:

$$(D): 2x+3y-1=0 \quad (D'): \frac{3}{2}x-y+4=0$$

هل  $(D)$  و  $(D')$  متعامدين؟

**الجواب:**  $\vec{n}(2;3)$  متجهة منظميه على  $(D)$

$$(D') \vec{n}'\left(\frac{3}{2}; -1\right)$$

$$\vec{n} \perp \vec{n}' \text{ ومنه } \vec{n} \cdot \vec{n}' = 2 \times \frac{3}{2} + 3 \times (-1) = 3 - 3 = 0$$

وبالتالي:  $(D) \perp (D')$

#### 4. مسافة نقطة عن مستقيم

**تعريف:** ليكن  $(D)$  مستقيما معادلته:  $ax+by+c=0$  و  $A(x_A; y_A)$  نقطة من المستوى.

$$d(A; (D)) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ هي: المسافة من النقطة } A \text{ عن المستقيم } (D)$$

**مثال:**  $x-y+2=0$   $(D)$  و  $A(1;4)$  حدد مسافة النقطة  $A$  عن المستقيم  $(D)$

$$\text{الجواب: } d(A; (D)) = \frac{|1-4+2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

**تمرين 11:** نعتبر في المستوى النقطة:  $A(-1; -3)$  و المستقيم  $(D)$

$$\text{الذي معادلته: } x+2y-3=0$$

1. أحسب مسافة النقطة  $A$  عن المستقيم  $(D)$

2. حدد زوج إحداثيتي النقطة  $H$  المسقط العمودي للنقطة  $A$  على المستقيم  $(D)$

$$\text{الجواب: (1)} \quad d(A; (D)) = \frac{|-1-6-3|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|-10|}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$$

(2) نحدد أولا معادلة ديكارتية للمستقيم  $(AH)$ :

$$x+2y-3=0 \text{ (D) متجهة موجهة لـ } \vec{u}(-2,1)$$

اذن  $\vec{u}(-2,1)$  منظميه على  $(AH)$  اذن:  $-2x+1y+c=0$   $(AH)$

$$\text{ولدينا } A \in (AH) \text{ اذن: } (-2) \times (-1) - 3 + c = 0 \text{ يعني } c=1$$

$$\text{ومنه: } (AH) / -2x+1y+1=0$$

$H$  هي نقطة تقاطع  $(AH)$  و  $(D)$  اذن احداثيات  $H$  هي حلول

النظمة:

$$\begin{cases} x+2y=3 \\ -2x+y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-3=0 \\ -2x+y+1=0 \end{cases} \text{ نضرب المعادلة الاولى في } (-2) \times$$

$$\text{ونجد: } \begin{cases} 2x+4y=6 \\ -2x+y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4y=6 \\ -2x+y=-1 \end{cases} \text{ ونجمع المعادلتين ونجد: } x+2y=3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ 5y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4y-2x+y=6-1 \\ y=1 \end{cases}$$

$$\text{ومنه: } x+2y=3 \Leftrightarrow x+2=3 \Leftrightarrow x=1 \text{ ومنه } H(1;1)$$

**تمرين 12:** نعتبر في المستوى النقطتين:  $A(-1; -3)$  و  $B(3;2)$

1. حدد معادلة للمستقيم  $(AB)$

2. أحسب مسافة النقطة  $O$  عن المستقيم  $(AB)$

3. استنتج مساحة المثلث  $OAB$

4. حدد زوج إحداثيتي النقطة  $H$  المسقط العمودي للنقطة  $O$  على المستقيم  $(AB)$

**أجوبة:**

(1) نحدد أولا معادلة ديكارتية للمستقيم  $(AB)$ :

$$\vec{AB}(4,5) \text{ متجهة موجهة لـ } (AB) \text{ اذن: } \vec{AB}(-b, a)$$

$$a=5; b=-4$$

$$\text{ومنه: } (AB) / 5x-4y+c=0$$

$$\text{ولدينا } A \in (AB) \text{ اذن: } 5 \times (-1) - 4 \times (-3) + c = 0 \text{ يعني } c = -7$$

$$\text{ومنه: } (AB) / 5x-4y-7=0$$

(2) لدينا  $O(0,0)$  اذن:

$$d(O; (AB)) = \frac{|5 \times 0 - 4 \times 0 - 7|}{\sqrt{5^2 + (-4)^2}} = \frac{|-7|}{\sqrt{41}} = \frac{7}{\sqrt{41}} = \frac{7\sqrt{41}}{41}$$

(3) لدينا  $d(O; (AB)) = OH$  اذن:

$$S_{ABC} = \frac{AB \times OH}{2} = \frac{\sqrt{4^2 + (-5)^2} \times \frac{7}{\sqrt{41}}}{2} = \frac{\sqrt{41} \times \frac{7}{\sqrt{41}}}{2} = \frac{7}{2}$$

(4) نحدد أولا معادلة ديكارتية للمستقيم  $(OH)$ :

$$\text{لدينا } \vec{AB}(4,5) \text{ متجهة منظميه على } (OH)$$

$$\text{اذن: } (OH) / 4x+5y+c=0$$

$$\text{ولدينا } O \in (OH) \text{ اذن: } 4 \times 0 + 5 \times 0 + c = 0 \text{ يعني } c=0$$

$$\text{ومنه: } (OH) / 4x+5y=0$$

$H$  هي نقطة تقاطع  $(OH)$  و  $(AB)$  اذن احداثيات  $H$  هي حلول

النظمة:

$$\begin{cases} 4x+5y=0 \\ 5x-4y=7 \end{cases} \text{ نستعمل طريقة المحددات لحل هذه النظمة:}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -41 \neq 0 \text{ هي: (1)}$$

$$\text{ومنه النظمة تقبل حلا وحيدا: هو } x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 7 & -4 \end{vmatrix}}{-41} = \frac{-35}{-41} = \frac{35}{41}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{28}{-41} = -\frac{28}{41} \text{ ومنه: } H\left(\frac{35}{41}; -\frac{28}{41}\right)$$

### III. معادلة ديكارتية لدائرة

#### 1. معادلة دائرة معرفة بمركزها و شعاعها

**خاصية:** معادلة الدائرة  $(C)$  التي مركزها  $\Omega(a; b)$

$$\text{وشعاعها } R (R > 0) \text{ هي: } (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

$$\text{وتكتب أيضا: } x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \text{ حيث: } c = a^2 + b^2 - R^2$$

**مثال 1:** حدد معادلة ديكارتية للدائرة  $(C)$  التي مركزها

$$A(-1; -3) \text{ وشعاعها } R = \sqrt{2}$$

$$\text{الجواب: } (C) (x-(-1))^2 + (y+3)^2 = (\sqrt{2})^2$$

يمكننا الاكتفاء بهذه الكتابة

$$\text{أو النشر فنجد: } (C) x^2 + y^2 + 2x + 6y + 8 = 0$$

**مثال 2:** حدد معادلة ديكارتية للدائرة  $(C)$  التي مركزها

$$\Omega(-2; 1) \text{ وتمر من النقطة } A(1; 4)$$

$$\text{الجواب: شعاع هذه الدائرة هو: } R = \Omega A$$

$$R = \Omega A = \sqrt{(x_A - x_\Omega)^2 + (y_A - y_\Omega)^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{ومنه معادلة الدائرة هي: } (C) (x-(-2))^2 + (y-1)^2 = (3\sqrt{2})^2$$

يمكننا الاكتفاء بهذه الكتابة

$$\text{أو النشر فنجد: } (C) x^2 + y^2 + 4x - 2y - 13 = 0$$

$$\text{وتكتب على الشكل: } x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$



**أمثلة:** حدد طبيعة (E) مجموعة النقط  $M(x; y)$  من المستوى

التي تحقق:

1.  $(E): x^2 + y^2 - x + 3y - 4 = 0$

2.  $(E): x^2 + y^2 - 6x + 2y + 10 = 0$

3.  $(E): x^2 + y^2 - 4x + 5 = 0$

**الأجوبة: (1)**  $a = -1; b = 3; c = -4$

نحسب:  $a^2 + b^2 - 4c = (-1)^2 + 3^2 - 4 \times (-4) = 1 + 9 + 16 = 26 > 0$

ومنه: (E) دائرة مركزها  $\Omega\left(\frac{-a}{2}; \frac{-b}{2}\right)$  أي  $\Omega\left(\frac{1}{2}; \frac{-3}{2}\right)$

وشعاعها:  $R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{26}}{2}$

$a = -6; b = 2; c = 10$  (2)

نحسب:  $a^2 + b^2 - 4c = (-6)^2 + 2^2 - 4 \times (10) = 36 + 4 - 40 = 0$

ومنه: (E) هي عبارة عن النقطة:  $\Omega(3; -1)$

$a = -4; b = 0; c = 5$  (3)

نحسب:  $a^2 + b^2 - 4c = 16 - 20 = -4 < 0$

ومنه: (E) هي المجموعة الفارغة

**تمرين 14:** حدد طبيعة (E) مجموعة النقط  $M(x; y)$  من

المستوى التي تحقق:  $(E): x^2 + y^2 + 5x - 3y + \frac{11}{2} = 0$

**الجواب:**  $a = 5; b = -3; c = \frac{11}{2}$

نحسب:  $a^2 + b^2 - 4c = 5^2 + (-3)^2 - 4 \times \left(\frac{11}{2}\right) = 25 + 9 - 22 = 12 > 0$

ومنه: (E) دائرة مركزها  $\Omega\left(\frac{-a}{2}; \frac{-b}{2}\right)$  أي  $\Omega\left(-\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right)$

وشعاعها:  $R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

**تمرين 15:** حدد طبيعة (E) مجموعة النقط  $M(x; y)$  من المستوى

التي تحقق:

1.  $(E) x^2 + y^2 - 1 = 0$

2.  $(E) x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$

3.  $(E) x^2 + y^2 - 4x - 2y + 7 = 0$

4.  $(E) x^2 + y^2 + 8y + 12 = 0$

**الأجوبة: (1)**  $x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0$

ومنه: (E) دائرة مركزها  $O(0; 0)$  وشعاعها:  $R = 1$

2.  $x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 3^2 - 3^2 - 1 + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$

$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4 = (2)^2 \Leftrightarrow$

ومنه: (E) دائرة مركزها  $\Omega(1; 3)$  وشعاعها:  $R = 2$

3.  $x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 - 1 - 4 + 7 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 2y + 7 = 0$

$(x-2)^2 + (y-1)^2 = -2 \Leftrightarrow$

ومنه: (E) هي المجموعة الفارغة

4.  $(x-0)^2 + y^2 + 2 \times 4 \times y + 4^2 - 4^2 + 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 8y + 12 = 0$

$(x-0)^2 + (y+4)^2 = 4 = (2)^2 \Leftrightarrow$

ومنه: (E) دائرة مركزها  $\Omega(0; -4)$  وشعاعها:  $R = 2$

**(2) داخل وخارج الدائرة**

**تمرين 13:** حدد معادلة ديكارتية للدائرة (C)

التي أحد أقطارها  $[AB]$  حيث  $A(1; 3)$  و  $B(-1; 1)$

**الجواب:** شعاع هذه الدائرة هو:  $R = \frac{AB}{2}$

$$R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}{2} = \frac{\sqrt{4+4}}{2} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

مركز الدائرة (C) هو: منتصف القطعة  $[AB]$

أي:  $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$  يعني  $I(0, 2)$

ومنه معادلة الدائرة هي:  $(C) (x-0)^2 + (y-2)^2 = (\sqrt{2})^2$

يعني:  $(C) x^2 + y^2 - 4y + 2 = 0$

**2. تمثيل بارامترية لدائرة:**

**خاصية و تعريف:** الدائرة (C) التي مركزها  $\Omega(a; b)$

وشعاعها  $R (R > 0)$  هي مجموعة النقط  $M(x; y)$  من المستوى

التي تحقق النظمة:  $(S) \begin{cases} x = a + R \cos \theta \\ y = b + R \sin \theta \end{cases}$

و النظمة (S) تسمى تمثيلا بارامترية للدائرة (C)

**مثال 1:** حدد تمثيلا بارامترية للدائرة (C) التي مركزها  $\Omega(1; -2)$

وشعاعها  $R = \sqrt{2}$

**الجواب:** تمثيل بارامترية للدائرة (C) هو:  $\begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \cos \theta \\ y = -2 + \sqrt{2} \sin \theta \end{cases}$

( $\theta \in \mathbb{R}$ ) بارامترية حقيقية

**مثال 2:** حدد مجموعة النقط  $M(x; y)$  من المستوى التي تحقق النظمة

( $\theta \in \mathbb{R}$ ) حيث  $\begin{cases} x = 3 + \sqrt{3} \cos \theta \\ y = 1 + \sqrt{3} \sin \theta \end{cases}$

**الجواب:**  $\begin{cases} x - 3 = \sqrt{3} \cos \theta \\ y - 1 = \sqrt{3} \sin \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + \sqrt{3} \cos \theta \\ y = 1 + \sqrt{3} \sin \theta \end{cases}$

$(x-3)^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{3} \cos \theta)^2 + (\sqrt{3} \sin \theta)^2 \Leftrightarrow$

$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 3((\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2) \Leftrightarrow$

$(x-3)^2 + (y-1)^2 = \sqrt{3}^2 \Leftrightarrow$

ومنه: مجموعة النقط  $M(x; y)$  هي الدائرة (C) التي مركزها

$\Omega(3; 1)$  وشعاعها  $R = \sqrt{3}$

**IV. دراسة مجموعة النقط  $M(x; y)$  بحيث**

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

**(1) خاصية:** لتكن  $a$  و  $b$  و  $c$  أعدادا حقيقية و (E) مجموعة النقط

$M(x; y)$  بحيث  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

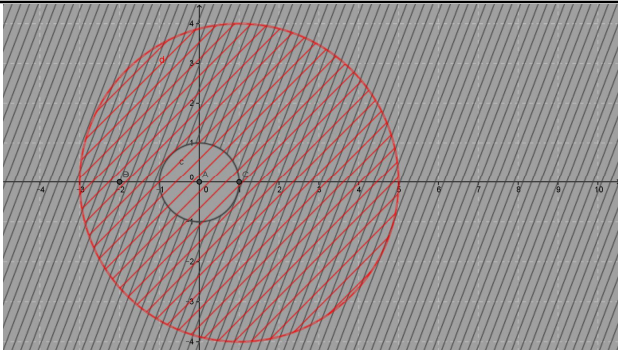
• تكون (E) دائرة إذا فقط إذا كان:  $a^2 + b^2 - 4c > 0$  ومركز هذه

الدائرة هو  $\Omega\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$

و شعاعها هو  $R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$

• إذا كان  $a^2 + b^2 - 4c < 0$  فان: (E) هي المجموعة الفارغة

• إذا كان  $a^2 + b^2 - 4c = 0$  فان (E) هي:  $(E) = \left\{ \Omega\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right) \right\}$



### V. الأوضاع النسبية لمستقيم و دائرة في المستوى

لدراسة الوضع النسبي لمستقيم  $(D)$  و دائرة  $(C)$  مركزها  $\Omega$  وشعاعها  $R$  يمكننا حساب  $d(\Omega; (D))$  مسافة النقطة  $\Omega$  عن المستقيم  $(D)$  ومقارنتها بالشعاع  $R$  وبالطبع هناك ثلاث حالات :

- إذا كانت  $d(\Omega; (D)) > R$  فان: المستقيم  $(D)$  لا يقطع الدائرة  $(C)$
- إذا كانت  $d(\Omega; (D)) < R$  فان : المستقيم  $(D)$  يقطع الدائرة  $(C)$  في نقطتين مختلفتين

- إذا كانت  $d(\Omega; (D)) = R$  فان : المستقيم  $(D)$  يقطع الدائرة  $(C)$  في نقطة وحيدة و نقول أيضا أن  $(D)$  مماس للدائرة  $(C)$

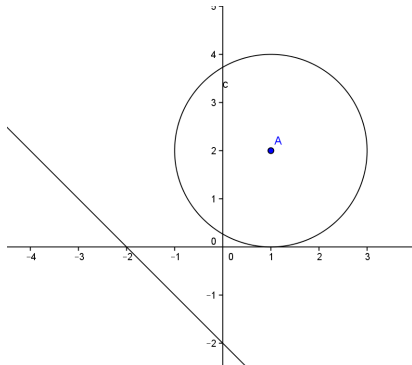
**مثال 1:** أدرس الوضع النسبي للدائرة  $(C)$  التي مركزها  $\Omega(1;2)$  وشعاعها  $R = 2$  مع المستقيم  $(D)$  الذي معادلته :

$$(D): x + y + 2 = 0$$

**الجواب:** نحسب  $d(\Omega, (P))$  ونقارنها مع شعاع الدائرة

$$d(\Omega, (P)) = \frac{|1+2+2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|5|}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} > R = 2$$

المستقيم  $(D)$  لا يقطع الدائرة  $(C)$



**مثال 2:** أدرس الوضع النسبي للدائرة  $(C)$  التي مركزها

$\Omega(1;2)$  وشعاعها  $R = 2$  مع المستقيم  $(D)$  الذي معادلته :

$$(D): x - y + 2 = 0$$

**الجواب:** نحسب  $d(\Omega, (P))$  ونقارنها مع شعاع الدائرة

$$d(\Omega, (P)) = \frac{|1-2+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|1|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} < R = 2$$

ومنه : المستقيم  $(D)$  يقطع الدائرة  $(C)$  في نقطتين مختلفتين

**سؤال :** حدد احداثيات نقط تقاطع الدائرة  $(C)$  و المستقيم  $(D)$

$$\text{معادلة الدائرة هي : } (x-1)^2 + (y-2)^2 = (2)^2$$

نحل اذن النظمة التالية :

**تعريف:** لتكن  $(C)$  دائرة مركزها  $\Omega(a;b)$  وشعاعها  $R (R > 0)$  و

$M$  نقطة من المستوى

• تكون النقطة  $M$  نقطة من الدائرة  $(C)$

إذا فقط إذا كان :  $\Omega M = R$

• تكون النقطة  $M$  خارج الدائرة  $(C)$

إذا فقط إذا كان :  $\Omega M > R$

• تكون النقطة  $M$  داخل الدائرة  $(C)$  إذا فقط إذا كان :  $\Omega M < R$

**تمرين 16:** حل مبيانيا المتراجحتين التاليتين :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 > 0 \\ 2x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 < 0 \end{cases} \quad (1)$$

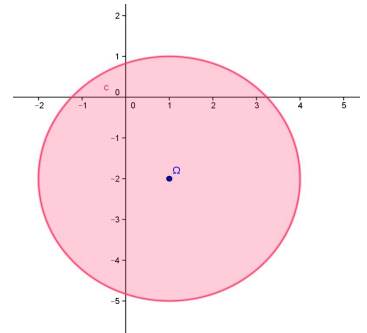
**الأجوبة : (1)**

$$x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 + 4x + 4 - 4 - 4 < 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 < 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 < 9 = (3)^2$$

ومنه :  $(E)$  هو داخل الدائرة التي مركزها  $\Omega(1;-2)$  وشعاعها :

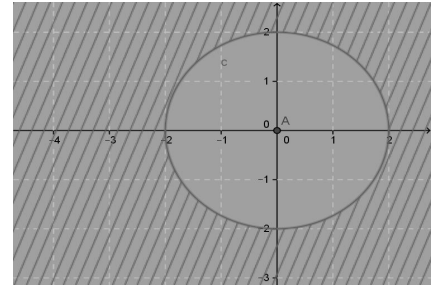
$$R = 3$$



$$(x-0)^2 + (y-0)^2 > 2^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 > 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4 > 0 \quad (2)$$

ومنه :  $(E)$  هو خارج الدائرة التي مركزها  $O(0;0)$  وشعاعها :

$$R = 2$$



**تمرين 17:** حل مبيانيا النظمة التالية:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 > 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 12 < 0 \end{cases}$$

**الجواب :**

$$(أ) \quad x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 - 12 < 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 12 < 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-0)^2 < 16 = (4)^2$$

وهذا يعني داخل الدائرة التي مركزها  $\Omega(2;0)$  وشعاعها :  $R = 4$

$$(ب) \quad (x-0)^2 + (y-0)^2 > 1^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 > 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 1 > 0$$

يعني خارج الدائرة التي مركزها  $O(0;0)$  وشعاعها :  $R = 1$

مجموعة حلول النظمة  $(E)$  هي أزواج احداثيات نقط المستوى التي

تنتمي الى تقاطع داخل الدائرة التي مركزها  $\Omega(2;0)$  وشعاعها :

$R = 4$  و خارج الدائرة التي مركزها  $O(0;0)$  وشعاعها :  $R = 1$

أي الجزء من المستوى المخدش باللونين معا

**تمرين 18:** أدرس تحليليا تقاطع الدائرة (C) التي مركزها  $\Omega(2;1)$  وشعاعها  $R=5$  مع المستقيم (D) الذي معادلته:  $(D): 3x+y-2=0$

**الجواب:** نحسب  $d(\Omega, (P))$  ونقارنها مع شعاع الدائرة

$$d(\Omega, (P)) = \frac{|6+1-2|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{|5|}{\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{2} < R=5$$

ومنه: المستقيم (D) يقطع الدائرة (C) في نقطتين مختلفتين: معادلة الدائرة هي:  $(x-2)^2+(y-1)^2=5^2$  تكافئ:

$$x^2+y^2-4x-2y-20=0$$

نحدد احداثيات نقط تقاطع الدائرة (C) و المستقيم (D)

نحل اذن النظام التالي:

$$\begin{cases} (1)x^2-x-2=0 \\ (2)y=-3x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1)x^2+y^2-4x-2y-20=0 \\ (2)3x+y-2=0 \end{cases}$$

نحسب مميز المعادلة (1) فنجد:  $\Delta=9$  ومنه للمعادلة

$$\text{حليين هما: } x_1 = \frac{1+3}{2} = 2 \text{ و } x_2 = -1$$

اذا كانت  $x_1 = 2$  فان  $y = -4$

اذا كانت  $x_2 = -1$  فان  $y = 5$

ومنه نقطتا التقاطع هما:  $A(2;-4)$  و  $A(-1;5)$

**تمرين 19:** أدرس تحليليا تقاطع الدائرة (C) التي

معادلته:  $x^2+y^2-2x-8y+1=0$  مع المستقيم (D) المعروف

$$(D): \begin{cases} x=1+2t \\ y=t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

**الجواب:** نعوض في المعادلة (1) فنجد:

$$t(5t-8)=0 \text{ يعني } 5t^2-8t=0 \text{ يعني } (1+2t)^2+t^2-2(1+2t)-8t+1=0$$

$$\text{يعني: } t_1 = 0 \text{ أو } t_2 = \frac{8}{5}$$

$$\text{اذا كانت } t_1 = 0 \text{ نعوض في } \begin{cases} x=1+2t \\ y=t \end{cases} \text{ فنجد } \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\text{اذا كانت } t_2 = \frac{8}{5} \text{ نعوض فنجد } \begin{cases} x = \frac{21}{5} \\ y = \frac{8}{5} \end{cases}$$

ومنه: المستقيم (D) يقطع الدائرة (C) في نقطتين مختلفتين

$$\text{و نقطتا التقاطع هما: } A(1;0) \text{ و } B\left(\frac{21}{5}; \frac{8}{5}\right)$$

### VI. معادلة ديكرتية لمستقيم مماس لدائرة في نقطة معلومة

**تذكير:** يكون المستقيم (D) مماسا للدائرة (C) ذات المركز  $\Omega$

عند النقطة A إذا فقط إذا كان: (D) عموديا على المستقيم (OA)

**خاصية:** لتكن الدائرة (C) التي معادلته  $x^2+y^2+ax+by+c=0$

$$\text{و } A(x_A; y_A) \text{ نقطة من الدائرة (C)}$$

معادلة ديكرتية للمماس للدائرة (C) في النقطة A هي:

$$(x-x_A)\left(\frac{a}{2}+x_A\right)+(y-y_A)\left(\frac{b}{2}+y_A\right)=0$$

**ملحوظة:** حصلنا على معادلة المماس للدائرة (C) في النقطة A

$$\text{باستعمال التكافؤ: } \overline{AM} \cdot \overline{AO} = 0 \Leftrightarrow M(x; y) \in (D)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1)(x-1)^2+(y-2)^2=(2)^2 \\ (2)x-y+2=0 \end{cases}$$

$$x+2=y \Leftrightarrow (2)$$

نعوض في المعادلة (1) فنجد:  $x+2=y$

$$(x-1)^2+(x)^2=4: \text{ يعني } (1)(x-1)^2+(x+2-2)^2=(2)^2$$

$$\text{يعني: } x^2-2x+1+x^2=4: \text{ يعني } 2x^2-2x-3=0$$

نحسب مميز المعادلة فنجد:  $\Delta=28$  ومنه للمعادلة حليين هما:

$$x_2 = \frac{2-2\sqrt{7}}{4} \text{ و } x_1 = \frac{2+2\sqrt{7}}{4}$$

$$\text{يعني: } x_2 = \frac{1-\sqrt{7}}{2} \text{ و } x_1 = \frac{1+\sqrt{7}}{2}$$

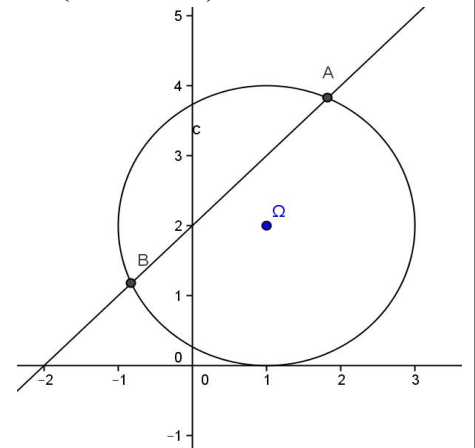
$$\text{اذا كانت } x_1 = \frac{1+\sqrt{7}}{2} \text{ نعوض في } x+2=y$$

$$\text{فنجد: } y = \frac{1+\sqrt{7}}{2} + 2 = \frac{5+\sqrt{7}}{2}$$

$$\text{اذا كانت } x_2 = \frac{1-\sqrt{7}}{2} \text{ نعوض في } x+2=y$$

$$\text{فنجد: } y = \frac{1-\sqrt{7}}{2} + 2 = \frac{5-\sqrt{7}}{2}$$

$$\text{ومنه نقطتا التقاطع هما: } A\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}; \frac{5+\sqrt{7}}{2}\right) \text{ و } B\left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}; \frac{5-\sqrt{7}}{2}\right)$$



**مثال 3:** أدرس الوضع النسبي للدائرة

(C) التي مركزها  $\Omega(1;2)$

وشعاعها  $R=1$  مع المستقيم (D)

الذي معادلته:

$$(D): y=3$$

$$(D): 0x+1y-3=0$$

**الجواب:** نحسب  $d(\Omega, (P))$  ونقارنها مع شعاع الدائرة

$$\text{ومنه: المستقيم (D) مماس للدائرة } d(\Omega, (P)) = \frac{|0+2-3|}{\sqrt{0^2+1^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{1}} = 1 = R$$

(C) سؤال: حدد احداثيات نقطة التماس T

$$\text{معادلة الدائرة هي: } (x-1)^2+(y-2)^2=1^2$$

نحل اذن النظام التالي:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1)(x-1)^2+(y-2)^2=1 \\ (2)y=3 \end{cases}$$

نعوض في المعادلة (1) فنجد:  $3=y$

$$\text{يعني } (x-1)^2=0: \text{ يعني } (1)(x-1)^2+1=1$$

$$\text{ومنه نقطة التماس هي: } T(1;3)$$

$$a=4; b=4; c=-2$$

$$a^2 + b^2 - 4c = (4)^2 + (4)^2 - 4 \times -2 = 16 + 16 + 8 = 40 > 0$$

ومنه : (E) دائرة مركزها  $\Omega(\frac{-a}{2}; \frac{-b}{2})$  أي  $\Omega(-2; -2)$

$$R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{40}}{2} = \sqrt{10}$$

2) نحسب  $d(\Omega, (P))$  ونقارنها مع شعاع الدائرة

$$d(\Omega, (P)) = \frac{|-2 - 6 - 2|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{|-10|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} = R$$

ومنه : المستقيم (D) مماس للدائرة (C)

3) نحدد إحداثيات نقطة التماس T

$$(x+2)^2 + (y+2)^2 = 10$$

نحل اذن النظام التالي :

$$\begin{cases} (1) (x+2)^2 + (y+2)^2 = 10 \\ (2) x = 2 - 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1) (x+2)^2 + (y+2)^2 = 10 \\ (2) x + 3y - 2 = 0 \end{cases}$$

نعوض في المعادلة (1) فنجد  $x = 2 - 3y$

$$y^2 - 2y + 1 = 0 \Rightarrow (y-1)^2 = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$x = 2 - 3y = -1$$

ومنه نقطة التماس هي :  $T(-1; 1)$

**مثال:** لتكن (C) الدائرة التي معادلتها الديكارتيية هي :

$$(1) x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$$

1) تأكد أن  $A(0; 1) \in (C)$  ثم حدد مركز وشعاع الدائرة (C)

2) معادلة مماس للدائرة (C) في النقطة A

**الجواب:** 1) نتحقق أن إحداثيات  $A(0; 1)$  تحقق المعادلة (1)

$$A(0; 1) \in (C) \Rightarrow 0^2 + 1^2 - 4 \times 0 - 2 \times 1 + 1 = 0$$

$$a=4; b=-2; c=1$$

$$a^2 + b^2 - 4c = (4)^2 + (-2)^2 - 4 \times 1 = 16 + 4 - 4 = 16 > 0$$

ومنه : (E) دائرة مركزها  $\Omega(\frac{-a}{2}; \frac{-b}{2})$  أي  $\Omega(-2; 1)$

$$R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{16}}{2} = 2$$

2) معادلة مماس للدائرة (C) في النقطة A

$$\overline{AM} \cdot \overline{A\Omega} = 0 \Leftrightarrow M(x; y) \in (D)$$

$$\overline{A\Omega}(-2; 0)$$

$$-2(x-0) = 0 \Leftrightarrow -2(x-0) + 0(y-1) = 0 \Leftrightarrow M(x; y) \in (D)$$

$$x = 0 \Leftrightarrow M(x; y) \in (D)$$

ومنه معادلة مماس الدائرة (C) في النقطة  $A(0; 1)$  هو المستقيم الذي

معادلته :

$$(D): x = 0$$

**تمرين 20:** لتكن (C) الدائرة التي معادلتها الديكارتيية هي :

$$x^2 + y^2 + 4x + 4y - 2 = 0$$

و المستقيم (D) الذي معادلته :  $x + 3y - 2 = 0$

1. حدد مركز وشعاع الدائرة (C)

2. بين أن المستقيم (D) مماس للدائرة (C)

3. حدد إحداثيات نقطة تماس الدائرة (C) و المستقيم (D)

**الجواب:** 1) نحدد مركز وشعاع الدائرة (C)