

### درس المتتاليات:

#### متتالية هندسية

- لكي نبين أن متتالية هندسية نحسب:  $u_{n+1} - u_n$  العدد  $q$  الذي نجده هو الأساس و  $u_n = u_0 \times q^n$  هي الكتابة بدلالة  $n$  إذا كانت  $(u_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q$  غير منعدم وحدها الأول  $u_0$  فان:  $u_n = u_0 q^{n-0}$  إذا كانت  $(u_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q$  غير منعدم وحدها الأول  $u_1$  فان:  $u_n = u_1 q^{n-1}$  مجموع حدود متتالية  $(u_n)_{n \in I}$  هندسية أساسها  $q$  هو:  $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_0 \left( \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right)$  :  $q \neq 1$

#### متتالية حسابية

- لكي نبين أن متتالية حسابية نحسب:  $u_{n+1} - u_n$  العدد  $r$  الذي نجده هو الأساس و  $u_n = u_0 + nr$  هي الكتابة بدلالة  $n$  إذا كانت  $(u_n)$  متتالية حسابية أساسها  $r$  وحدها الأول  $u_1$  فان:  $u_n = u_1 + (n-1)r$
- مجموع حدود متتالية  $(u_n)_{n \in I}$  حسابية :  $n > p \geq n_0$   $S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n$  هو:  $S_n = (n-p+1) \left( \frac{u_n + u_p}{2} \right)$

- نقول إن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة إذا كانت تقبل نهاية منتهية  $l$  ونقول إن المتتالية  $(u_n)$  متباعدة إذا كانت غير متقاربة
- كل متتالية تزايدية و مكبورة هي متقاربة و كل متتالية تناقصية و مصغورة هي متقاربة
- خاصية: ليكن  $a$  عددا حقيقيا (1) إذا كان:  $a > 1$  فان:  $(a^n)$  تؤول إلى  $+\infty$  (2) إذا كان:  $a = 1$  فان:  $(a^n)$  تؤول إلى 1 (3) إذا كان:  $-1 < a < 1$  فان:  $(a^n)$  تؤول إلى 0 (4) إذا كان:  $a \leq -1$  فان: المتتالية  $(a^n)$  ليست لها نهاية
- خاصية: إذا كانت  $(u_n)$  متتالية معرفة بحددها الأول من  $I$  من  $\mathbb{R}$  وبالعلاقة  $u_{n+1} = f(u_n)$  بحيث:  $f$  دالة متصلة علي مجال  $I$  و  $f(I) \subset I$  و  $(u_n)$  متقاربة فان: نهايتها  $l$  حل للمعادلة:  $f(x) = x$

#### العمليات على النهايات

|                        |                |           |           |           |           |           |          |       |
|------------------------|----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------|-------|
| $\lim u_n$             | $l$            | $l < 0$   | $l > 0$   | $-\infty$ | $l < 0$   | $l$       | $\infty$ | 0     |
| $\lim v_n$             | $l' \neq 0$    | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $l < 0$   | $-\infty$ | $\infty$ | 0     |
| $\lim \frac{u_n}{v_n}$ | $\frac{l}{l'}$ | $0^+$     | $0^-$     | $0^-$     | $+\infty$ | $0^+$     | ش غ م    | ش غ م |

|                   |          |           |           |           |           |           |
|-------------------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\lim u_n$        | $l$      | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim v_n$        | $l'$     | $l$       | $l$       | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $\lim(u_n + v_n)$ | $l + l'$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | ش غ م     |

|                        |               |           |           |           |           |           |           |           |          |
|------------------------|---------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------|
| $\lim u_n$             | $l$           | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $\infty$ |
| $\lim v_n$             | $l'$          | $l > 0$   | $l < 0$   | $l > 0$   | $l < 0$   | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | 0        |
| $\lim(u_n \times v_n)$ | $l \times l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | ش غ م    |

|                      |               |           |           |           |           |
|----------------------|---------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\lim u_n$           | $l \neq 0$    | $0^+$     | $0^-$     | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim \frac{1}{u_n}$ | $\frac{1}{l}$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0^+$     | $0^-$     |

خاصية: لتكن  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متتاليتين عدديتين متقاربتين

$l$  و  $l'$  عددين حقيقيين بحيث  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$  ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l'$

إذا كانت:  $u_n \geq v_n$  فان:  $l \geq l'$

#### ملاحظات:

- نهاية متتالية حدودية هي نهاية حدها الأكبر درجة
- نهاية متتالية جذرية هي خارج نهاية حدها الأكبر درجة.

خاصية: لتكن  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متتاليتين عدديتين

$l$  و  $\alpha > 0$  عددين حقيقيين بحيث

إذا كانت:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$  و  $\forall n \geq p \quad |v_n - l| \leq \alpha u_n$

فان: المتتالية  $(v_n)$  متقاربة و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$

خاصية: لتكن  $(u_n)$  و  $(v_n)$  و  $(w_n)$  متتاليات عديدة

إذا كانت:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$  و  $\forall n \geq p \quad w_n < u_n < v_n$

فان: المتتالية  $(u_n)$  متقاربة و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$