

ملخص درس المعادلات والمترجمات والنظمت

الجواب (1): $4x^2 - 9 = 0$ يعني $(2x)^2 - 3^2 = 0$ يعني

$$(2x-3)(2x+3) = 0$$

يعني $2x+3=0$ أو $2x-3=0$ يعني $x = \frac{3}{2}$ أو $x = -\frac{3}{2}$

الطريقة: في جدول نعطي إشارة كل عامل على الشكل $ax + b$ ثم استنتج إشارة الجداء أو الخارج مع ترتيب تزايد للقيم التي يندعم فيها كل عامل.

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$2x+3$	-	0	+	+
$2x-3$	-	-	0	+
$(2x-3)(2x+3)$	+	0	-	+

و منه فان: $S =]-\infty; -\frac{3}{2}] \cup]\frac{3}{2}; +\infty[$

$$(1-x)(2x+4) > 0 \quad (2)$$

$1-x=0$ أو $2x+4=0$ يعني $(1-x)(2x+4)=0$

يعني $x=1$ أو $x=-2$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$2x+4$	-	0	+	+
$1-x$	+	+	0	-
$(1-x)(2x+4)$	-	0	+	-

و منه فان: $S =]-2; 1[$

III. المعادلات من الدرجة الثانية بمجهول واحد:

لحل المعادلة: $ax^2 + bx + c = 0$ نحسب مميز المعادلة

$$\Delta = b^2 - 4 \times a \times c$$

✓ إذا كان $\Delta < 0$ فان المعادلة ليس لها حل في \mathbb{R} .

✓ إذا كان $\Delta = 0$ فان المعادلة تقبل حلا وجيدا هو: $-\frac{b}{2a}$

✓ إذا كان $\Delta > 0$ فان المعادلة تقبل حلين هما: $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

نرمز لمجموعة حلول المعادلة بالرمز S .

مثال 1: المعادلة $3x^2 + x + 2 = 0$ ليس لها حلا في \mathbb{R} . لأن

$$\Delta = 1 - 4 \times 3 \times 2 = -23 < 0$$

مثال 2: المعادلة $x^2 - 10x + 25 = 0$ لها حل وحيد لأن

$$\Delta = 10^2 - 4 \times 25 = 0$$

و بالتالي مجموعة حلولها هي $S = \{5\}$

مثال 3: نعتبر المعادلة $x^2 - 3x + 2 = 0$ لدينا $\Delta = 9 - 4 \times 2 = 1$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$S = \{1; 2\} \text{ و } x_2 = \frac{3+1}{2} = 2 \text{ و } x_1 = \frac{3-1}{2} = 1$$

I. المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

تعريف: ليكن a و b عددين حقيقيين. كل معادلة على الشكل $ax + b = 0$ تسمى معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد, حيث x هو المجهول.

أمثلة: حل في \mathbb{R} المعادلات التالية:

$$(1) \quad -2x + 22 = 0 \quad (2) \quad 3(2x+5) = 6x-1$$

$$(3) \quad 4(x-2) = 6x - 2(x+4) \quad (4) \quad 9x^2 - 16 = 0$$

(الجواب: 1) $-2x + 22 = 0$ يعني $-2x = -22$

يعني $x = 11$ ومنه: $S = \{11\}$ وتسمى مجموعة حلول المعادلة

$$(2) \quad 3(2x+5) = 6x-1 \text{ يعني } 6x+15 = 6x-1$$

يعني $6x - 6x = -1 - 15$ يعني $0x = -16$ يعني $0 = -16$

وهذا غير ممكن ومنه: $S = \emptyset$

$$(3) \quad 4(x-2) = 6x - 2(x+4) \text{ يعني } 4x - 8 = 6x - 2x - 8$$

يعني $4x - 4x + 8 - 8 = 0$

ومنه: كل عدد حقيقي هو حل لهذه المعادلة وبالتالي: $S = \mathbb{R}$

(4) أمامنا معادلة من الدرجة الثانية

$$(التعميل) \quad 9x^2 - 16 = 0 \text{ يعني } (3x)^2 - 4^2 = 0$$

يعني $(3x-4)(3x+4) = 0$ يعني $3x-4=0$ أو $3x+4=0$

يعني $3x = 4$ أو $3x = -4$ يعني $x = \frac{4}{3}$ أو $x = -\frac{4}{3}$

ومنه: $S = \left\{ -\frac{4}{3}, \frac{4}{3} \right\}$

II. المترجمات من الدرجة الأولى بمجهول واحد:

تعريف: ليكن a و b عددين حقيقيين كل مترجمة على الشكل $ax + b \geq 0$ أو $ax + b > 0$ أو $ax + b \leq 0$ أو $ax + b < 0$ تسمى مترجمة من الدرجة الأولى بمجهول واحد حيث x هو المجهول.

إشارة الحدانية $ax + b$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	إشارة a	0	عكس إشارة a

مثال 1: حل في مجموعة الأعداد الحقيقية المترجمات التالية:

$$(1) \quad -2x + 12 > 0 \quad (2) \quad 5x - 15 \leq 0$$

أجوبة: (1) $-2x + 12 > 0$ يعني $-2x = -12$ يعني $x = 6$ كافئ $x = 6$

و بما أن: $a = -2$ و $a < 0$ فان جدول الإشارة هو كالتالي:

x	$-\infty$	6	$+\infty$
$-2x+12$	-	0	+

و منه فان: $S =]-\infty; 6[$

$$(2) \quad 5x - 15 \leq 0 \quad 5x - 15 = 0 \text{ يكافئ } x = 3$$

و بما أن: $a = 5$ و $a > 0$ فان جدول الإشارة هو كالتالي:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$5x-15=0$	-	0	+

و منه فان: $S =]-\infty; 6[$

مثال 2: حل في مجموعة الأعداد الحقيقية المترجمات التالية:

$$(1) \quad 4x^2 - 9 \geq 0 \quad (2) \quad (1-x)(2x+4) > 0$$

IV. إشارة ثلاثية الحدود $ax^2 + bx + c$:

الحالة 1: إذا كان $\Delta > 0$ و x_1 و x_2 هما جذري ثلاثية الحدود فان:

x	x_1	x_2	$+\infty$	$-\infty$
$P(x) = ax^2 + bx + c$	إشارة a	0	عكس إشارة a	إشارة a

الحالة 2: إذا كان $\Delta = 0$: هو الجذر الوحيد المزدوج فان:

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
$P(x) = ax^2 + bx + c$	إشارة a	0	إشارة a

الحالة 3: إذا كان $\Delta < 0$ فان إشارة $P(x)$ هي إشارة العدد a

فان:

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x) = ax^2 + bx + c$	إشارة a	

مثال 1: أدرس إشارة الحدودية $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$

وحل في \mathbb{R} المتراجحة: $2x^2 - 3x + 1 \geq 0$

أجوبة (1): $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$ $a = 2$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 9 - 8 = 1 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فان للحدودية جذرين هما:

$$x_1 = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \times 2} = \frac{3+1}{4} = 1 \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \times 2} = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$	
$P(x)$	+	0	-	0	+

(2) حل المتراجحة: $S =]-\infty, \frac{1}{2}] \cup [1, +\infty[$

مثال 2: أدرس إشارة الحدودية $P(x) = -2x^2 + 4x - 2$

وحل في \mathbb{R} المتراجحة: $-2x^2 + 4x - 2 \leq 0$

أجوبة (1): $P(x) = -2x^2 + 4x - 2$ $a = -2$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4 \times (-2) \times (-2) = 16 - 16 = 0$$

بما أن $\Delta = 0$ فان هذه الحدودية لها جذر وحيد هو: $x_1 = \frac{-4}{2 \times (-2)} = 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$P(x) = -2x^2 + 4x - 2$	-	0	-

(2) حل المتراجحة: $S = \mathbb{R}$

مثال 3: أدرس إشارة الحدودية $P(x) = 3x^2 + 6x + 5$

وحل في \mathbb{R} المتراجحة: $3x^2 + 6x + 5 < 0$

أجوبة (1): $P(x) = 3x^2 + 6x + 5$ $a = 3 > 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (6)^2 - 4 \times 3 \times 5 = 36 - 60 = -24 < 0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x) = 3x^2 + 6x + 5$	+	

(2) حل المتراجحة: $S = \emptyset$

V. النظم:

(1) طريقة التعويض:

مثال: حل في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ النظمة التالية: $\begin{cases} 4x + y = 10 \\ -5x + 2y = -19 \end{cases}$

الجواب: نبحث عن y في المعادلة الأولى مثلا

$$y = 10 - 4x \quad \text{يعني} \quad 4x + y = 10$$

ونعوض y بقيمتها في المعادلة الثانية

$$-5x + 2(10 - 4x) = -19 \quad \text{يعني} \quad -5x + 2y = -19$$

يعني $20 - 8x - 5x = -19$ يعني $-13x = -39$ يعني $x = 3$

ونعوض x ب 3 في المعادلة $y = 10 - 4x$ فنجد $y = -2$

ومنه: $S = \{(3, -2)\}$

(2) طريقة التآلفية الخطية

مثال: حل في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ النظمة التالية: $\begin{cases} 4x + y = 10 \\ -5x + 2y = -19 \end{cases}$

الجواب: نضرب المعادلة الأولى في العدد (-2) فنحصل

على: $\begin{cases} -8x - 2y = -20 \\ -5x + 2y = -19 \end{cases}$ وبجمع المعادلتين طرف لطرف نجد:

$$-13x = -39 \quad \text{يعني} \quad x = 3$$

ونعوض x ب 3 في المعادلة $4x + y = 10$ فنجد $y = -2$

ومنه: $S = \{(3, -2)\}$

(3) طريقة المحددة:

مثال: طريقة المحددة: حل في \mathbb{R}^2 النظمة: (1) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ -x + 4y = 2 \end{cases}$

الجواب: محددة النظمة (1) هي: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$ ومنه النظمة

$$\text{تقبل حلا وحيدا: هو} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{12}{6} = 2 \quad \text{و} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{6}{6} = 1$$

ومنه: $S = \{(2, 1)\}$