مستوى: السنة الثانية من سلك الباكالوريا
شعبة العلوم التجريبية

- **مسلك علوم الحياة و الأرض**
- **مسلك العلوم الفيزيائية**
- **مسلك العلوم الزراعية**

مذكرة رقم 5 في درس الدوال الأصلية

محتوى البرنامج

- الدوال الأصلية لدالة متصلةعلى مجال
- الدوال الأصلية لمجموع دالتيت
- الدوال الأصلية لجداء دالة وعدد حقيقي

القدرات المنتظرة

- تحديد الدوال الأصلية للدوال الاعتيادية
- استعمال صيغ الاشتقاق لتحديد الدوال الأصلية لدالة على مجال

I. الدوال الأصلية لدالة:

1)دالة أصلية لدالة على مجال:

نشاط: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كالتالي:

$f(x)=x^2+2x+3$

1. حدد دالة F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $(\forall x\in\mathbb{R});F'(x)=f(x)$
2. هل توجد دالة أخرى G بحيث $(\forall x\in\mathbb{R});G'(x)=f(x)$
3. كم توجد من دالة F بحيث $(\forall x\in\mathbb{R});F'(x)=f(x)$؟

نشاط:(1 الدالة المعرفة كالتالي :

$F(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+3x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وتحقق $(\forall x\in\mathbb{R});F'(x)=f(x)$

نقول أن : F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

2) الدالة المعرفة كالتالي :

$G(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+3x+2$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وتحقق أيضا $(\forall x\in\mathbb{R});G'(x)=f(x)$

نقول أن : G هي دالة أصلية أخرى للدالة f على $\mathbb{R}$

3) هناك عدد لامنته من الدول الأصلية للدالة f

ونقول مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $x\mapsto\frac{1}{3}x^3+x^2+3x+k$

حيث k عدد حقيقي.

تعريف: لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I

نسمي دالة أصلية للدالة f على I , كل دالة F قابلة للاشتقاق على I و, مشتقتها f هي ,أي $(\forall x\in I);F'(x)=f(x)$

خاصية 1: لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I ,و F دالة أصلية للدالة على I ,

الدوال الأصلية للدالة f على I هي الدوال المعرفة على I بما يلي : $x\mapsto F(x)+k$, حيث k عدد حقيقي.

خاصية 2: لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I و x_0 عنصرا من I و y_0 عددا حقيقيا معلوما.

إذا كانت f دالة تقبل دالة أصلية على I فانه توجد دالة أصلية وحيدة G للدالة f على I بحيث: $G(x_0)=y_0$

البرهان: إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على I ,فان جميع الدوال الأصلية للدالة f معرفة على I بما يلي: $G(x)=F(x)+k$

حيث k عدد حقيقي.الشرط $G(x_0)=y_0$ يعني $F(x_0)+k=y_0$ أي $k=y_0-F(x_0)$

إذن توجد دالة أصلية وحيدة G للدالة f على I معرفة بما يلي:

$G(x)=F(x)+y_0-F(x_0)$

خاصية 3: كل دالة متصلة على مجال I تقبل دالة أصلية على I .

خاصية 4: لتكن f و g دالتين عدديتين معرفتين على مجال I ,و k عددا حقيقيا.

إذا كانت F و G دالتين أصليتين,على التوالي للدالتين f و g على I , فان:

- الدالة $F+G$ دالة أصلية للدالة $f+g$ على I .
- الدالة kF دالة أصلية للدالة kf على.

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ كالتالي:

$f(x)=2x^2+x+1+\frac{1}{x^2}$

1. حدد مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على $]0;+\infty[$
2. حدد الدالة الأصلية F للدالة f بحيث $F(1)=3$

أجوبة: الأجوبة: 1: $f(x)=2x^2+x+1+\frac{1}{x^2}$

اذن : $F(x)=2\times\frac{1}{3}x^{2+1}+\frac{1}{2}x^{1+1}+1x-\frac{1}{x^2}+k$

$F(x)=\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{x}+k$ حيث $k\in\mathbb{R}$

2) $F(1)=3$ يعني $\frac{2}{3}\times1^3+\frac{1}{2}\times1^2+1-\frac{1}{1}+k=3$

يعني $\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+1-1+k=3$ يعني $\frac{7}{6}+k=3$

يعني $k=3-\frac{7}{6}$ يعني $k=\frac{11}{6}$

ومنه الدالة الأصلية F للدالة f بحيث $F(1)=3$

هي الدالة المعرفة كالتالي : $F(x)=\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{x}+\frac{11}{6}$

II. جدول دوال أصلية لدوال اعتيادية:

انطلاقا من القراءة العكسية لجدول مشتقات الدوال الاعتيادية نحصل على الجدول التالي:

الدالة f	الدوال الأصلية للدالة f على مجال I
$x\mapsto k;k\in\mathbb{R}$	$x\mapsto kx+c;c\in\mathbb{R}$
$x\mapsto x$	$x\mapsto \frac{x^2}{2}+c;c\in\mathbb{R}$
الدالة f	الدوال الأصلية للدالة f على مجال I
$x\mapsto x^n;n\in\mathbb{N}^*$	$x\mapsto\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c;c\in\mathbb{R}$
$x\mapsto\frac{1}{x^2}$	$x\mapsto-\frac{1}{x}+c;c\in\mathbb{R}$
$x\mapsto\frac{1}{x^n};n\in\left(\mathbb{N}^*-\{1\}\right)$	$x\mapsto\frac{1}{-n+1}x^{-n+1}+c;c\in\mathbb{R}$
$x\mapsto\frac{1}{\sqrt{x}}$	$x\mapsto 2\sqrt{x}+c;c\in\mathbb{R}$
$x\mapsto x^r;r\in\left(\mathbb{Q}^*-\{-1\}\right)$	$x\mapsto\frac{1}{r+1}x^{r+1}+c;c\in\mathbb{R}$
$x\mapsto\cos(x)$	$x\mapsto\sin(x)+c;c\in\mathbb{R}$
$x\mapsto\sin(x)$	$x\mapsto-\cos(x)+c;c\in\mathbb{R}$
$x\mapsto1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$	$x\mapsto\tan(x)+c;c\in\mathbb{R}$

III. الدوال الأصلية و العمليات:

انطلاقا من القراءة العكسية للعمليات على الدوال المشتقة حصلنا على الجدول أسفله:

الدالة f معرفة على مجال I	دالة أصلية للدالة f على المجال I
$u'+v'$	$u+v$
$uv'+vu'$	uv
$u'u^n;n\in\mathbb{N}^*$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$
$u'u^r;r\in\left(\mathbb{Q}^*-\{-1\}\right)$	$u\quad\frac{1}{r+1}u^{r+1}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	$\frac{u}{v}$
$x\mapsto u'(ax+b);a\in\mathbb{R}^*;b\in\mathbb{R}$	$x\mapsto\frac{1}{a}u(ax+b)$

أمثلة: حدد مجموعة الدوال الأصلية للدوال التالية :

1) $f(x)=5x^4+3x+1$ 2) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+\cos x+\sin x-1$

3) $f(x)=\sin x+x\cos x$ 4) $f(x)=(2x-1)^3$ 5) $f(x)=\frac{x}{(x^2-1)^2}$

أجوبة: 1) $f(x)=5x^4+3x+1$

اذن $F(x)=5\times\frac{1}{5}x^5+3\times\frac{1}{2}x^2+1x+k$ حيث $k\in\mathbb{R}$

2) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+\cos x+\sin x-1$

اذن $F(x)=2\sqrt{x}+\sin x-\cos x-x+k$ حيث $k\in\mathbb{R}$

3) $f(x)=\sin x+x\cos x=x'\sin x+x(\sin x)'$

اذن $F(x)=x\times\sin x+k$ حيث $k\in\mathbb{R}$

4) $f(x)=(2x-1)^3=\frac{1}{2}(2x-1)'(2x-1)^3$

اذن $F(x)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3+1}(2x-1)^{3+1}+k$ حيث $k\in\mathbb{R}$

ومنه $F(x)=\frac{1}{8}(2x-1)^4+k$ حيث $k\in\mathbb{R}$

5) $f(x)=-\frac{x}{(x^2-1)^2}$ يعني $f(x)=-\frac{(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}$

اذن $F(x)=\frac{1}{x^2-1}+k$ حيث $k\in\mathbb{R}$

تمرين1: حدد مجموعة الدوال الأصلية للدوال التالية :

1) $f(x)=8x^3+4x^2+x+6$ 2) $f(x)=2\cos x-\sin x-3$

3) $f(x)=2x\sin x+x^2\cos x$ 4) $f(x)=(4x+5)^2$ 5) $f(x)=\frac{x^2}{(x^3+2)^2}$

أجوبة :

1) $f(x)=8x^3+4x^2+x+6$

اذن $F(x)=8\times\frac{1}{4}x^4+4\times\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+6x+k=2x^4+\frac{4}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+6x+k$

حيث $k\in\mathbb{R}$

2) $f(x)=2\cos x-\sin x-3$

$f(x)=2\sin x+\cos x-3x+k$ حيث $k\in\mathbb{R}$

3) $f(x)=2x\sin x+x^2\cos x=(x^2)'\sin x+x^2(\sin x)'$

اذن $F(x)=x^2\times\sin x+k$ حيث $k\in\mathbb{R}$

4) $f(x)=(4x+5)^2$

$f(x)=(4x+5)^2=\frac{1}{4}(4x+5)'(4x+5)^2$

اذن $F(x)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2+1}(4x+5)^{2+1}+k$ حيث $k\in\mathbb{R}$

ومنه $F(x)=\frac{1}{12}(4x+5)^3+k$ حيث $k\in\mathbb{R}$

5) $f(x)=\frac{x^2}{(x^3+2)^2}$ يعني $f(x)=-\frac{1}{3}\left(-\frac{(x^3+2)'}{(x^3+2)^2}\right)$

اذن $F(x)=-\frac{1}{3}\frac{1}{x^3+2}+k$ حيث $k\in\mathbb{R}$

مثال: حدد مجموعة الدوال الأصلية للدوال التالية :

1) $f(x)=2\sqrt{2x+1}$ 2) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

أجوبة: 1) $f(x)=2\sqrt{2x+1}=(2x+1)'(2x+1)^{\frac{1}{2}}$

اذن $F(x)=\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(2x+1)^{\frac{1}{2}+1}+k$ حيث $k\in\mathbb{R}$

ومنه $F(x)=\frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}+k$ حيث $k\in\mathbb{R}$

ومنه $F(x)=\frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\left(\sqrt{2x+1}\right)^3+k$ حيث $k\in\mathbb{R}$

2) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{\left(x^2+1\right)'}{2\sqrt{x^2+1}}$

اذن $F(x)=\sqrt{x^2+1}+k$ حيث $k\in\mathbb{R}$

تمرين2: حدد مجموعة الدوال الأصلية للدوال التالية :

1) $f(x)=x\sqrt{x^2+1}$ 2) $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{8+x^3}}$ 3) $f(x)=\sin(4x-1)$

4) $f(x)=\cos(2x+8)$ 5) $f(x)=(\sin x)^2\cos x$

أجوبة :1) $f(x)=x\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)'\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}$

اذن $F(x)=\frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{2}+1}\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}+1}+k=\frac{1}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}+k$

ومنه $F(x)=\frac{1}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3+k$ حيث $k\in\mathbb{R}$

2) $f(x)==\frac{x^2}{\sqrt{8+x^3}}=\frac{2}{3}\frac{\left(8+x^3\right)'}{2\sqrt{8+x^3}}$

اذن $F(x)=\frac{2}{3}\sqrt{8+x^3}+k$ حيث $k\in\mathbb{R}$

3) $f(x)=\sin(4x-1)$ اذن $F(x)=-\frac{1}{4}\cos(4x-1)+k$ $k\in\mathbb{R}$

4) $f(x)=\cos(2x+8)$ اذن $F(x)=\frac{1}{2}\sin(2x+8)+k$ $k\in\mathbb{R}$

5) $f(x)=(\sin x)^2\cos x$ يعني $f(x)=(\sin x)'(\sin x)^2$

ومنه $F(x)=\frac{1}{2+1}(\sin x)^{2+1}+k$

يعني $F(x)=\frac{1}{3}(\sin x)^3+k$ $k\in\mathbb{R}$

تمرين3: نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ كالتالي : $f(x)=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

1. حدد العددين الحقيقيين a و b بحيث: $\forall x\in[0;+\infty[\quad f(x)=a+\frac{b}{(x+1)^2}$

2. حدد الدالة الأصلية F للدالة f بحيث $F(1)=\frac{5}{2}$

أجوبة:(1

$f(x)=a+\frac{b}{(x+1)^2}=\frac{a(x+1)^2+b}{(x+1)^2}=\frac{ax^2+2ax+a+b}{(x+1)^2}$

بالمقارنة مع الكتابة : $f(x)=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

نجد أن : $\begin{cases}a=1\\2a=2\\a+b=0\end{cases}$ يعني $\begin{cases}a=1\\a=1\\b=-1\end{cases}$ ومنه : $f(x)=1-\frac{1}{(x+1)^2}$

2) $f(x)=1-\frac{1}{(x+1)^2}$ يعني $f(x)=1-\frac{(x+1)'}{(x+1)^2}$

ومنه : $F(x)=x+\frac{1}{x+1}+k$ $k\in\mathbb{R}$ $\forall x\in[0;+\infty[$

تمرين4: نعتبر الدالة f المعرفة على $[1;+\infty[$ كالتالي : $f(x)=x\sqrt{x-1}$

1. بين أن : $f(x)=\sqrt{(x-1)^3}+\sqrt{x-1}$ $\forall x\in[1;+\infty[$

2. حدد الدالة الأصلية F للدالة f بحيث $F(2)=1$

أجوبة:

1) $\sqrt{(x-1)^3}+\sqrt{x-1}=\sqrt{(x-1)^2}\times\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}=|x-1|\times\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}$

نعلم أن : $x\in[1;+\infty[$ اذن : $x\geq 1$ يعني $x-1\geq 0$

ومنه : $|x-1|=x-1$

اذن : $\sqrt{(x-1)^3}+\sqrt{x-1}=(x-1)\times\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}=x\sqrt{x-1}-1\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}=x\sqrt{x-1}$

2) $f(x)=\sqrt{(x-1)^3}+\sqrt{x-1}$ يعني

$f(x)=\left((x-1)^3\right)^{\frac{1}{2}}+(x-1)^{\frac{1}{2}}=(x-1)^{\frac{3}{2}}+(x-1)^{\frac{1}{2}}=(x-1)'(x-1)^{\frac{3}{2}}+(x-1)'(x-1)^{\frac{1}{2}}$

اذن $F(x)=\frac{1}{\frac{3}{2}+1}(x-1)^{\frac{3}{2}+1}+\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(x-1)^{\frac{1}{2}+1}+k=\frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+k$

ومنه $F(x)=\frac{2}{5}\left(\sqrt{x-1}\right)^5+\frac{2}{3}\left(\sqrt{x-1}\right)^3+k$ حيث $k\in\mathbb{R}$

تمرين7نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كالتالي:

$$f(x)=\frac{5x^4+40x^2+20x+80}{\left(x^2+4\right)^2}$$

1. حدد الأعداد الحقيقية a و b و c بحيث : $f(x)=\frac{ax+b}{\left(x^2+4\right)^2}+c$ $\forall x\in[0;+\infty[$

2. حدد مجموعة الدوال الأصلية للدالة f

3. حدد الدالة الأصلية F للدالة f بحيث $F(0)=c$

أجوبة :

$f(x)=\frac{ax+b}{\left(x^2+4\right)^2}+c=\frac{ax+b+c\left(x^2+4\right)^2}{\left(x^2+4\right)^2}=\frac{ax+b+cx^4+8cx^2+16c}{\left(x^2+4\right)^2}$

$f(x)=\frac{cx^4+8cx^2+ax+(b+16c)}{\left(x^2+4\right)^2}$

بالمقارنة مع الكتابة : $f(x)=\frac{5x^4+40x^2+20x+80}{\left(x^2+4\right)^2}$

نجد أن : $\begin{cases}c=5\\8c=40\\a=20\\b+16c=80\end{cases}$ يعني $\begin{cases}c=5\\c=5\\a=20\\b=0\end{cases}$ ومنه : $f(x)=\frac{20x}{\left(x^2+4\right)^2}+5$

2) $f(x)=\frac{20x}{\left(x^2+4\right)^2}+5$ يعني $f(x)=10\frac{\left(x^2+4\right)'}{\left(x^2+4\right)^2}+5$

ومنه : $F(x)=-\frac{10}{x^2+4}+5x+k$ $k\in\mathbb{R}$ $\forall x\in[0;+\infty[$

3) $F(0)=5$ يعني $-\frac{10}{4}+k=5$ يعني $k=5+\frac{5}{2}$ يعني $k=\frac{15}{2}$

ومنه : $F(x)=-\frac{10}{x^2+4}+5x+\frac{15}{2}$ $\forall x\in[0;+\infty[$